

# Filosofisk logik

## Kapitel 18

Robin Stenwall  
Lunds universitet

# Dagens upplägg

- Modeller för FOL
- Sanning i FOL
  - Tarskis idé
  - Satisfiering
  - Definitionen på sanning i en modell
  - Definitionen på FO-konsekvens
  - Definitionen på FO-giltighet

# Modeller för FOL

- Kapitel 18.1 behandlar modeller i FOL
- Vår målsättning är att bevisa att någonting är en FO-konsekvens av vårt språk.
- Att visa att någonting är en tautologisk konsekvens var lätt i satslogiken.
- Att visa att någonting är en FO-konsekvens är lite svårare.
- Anledningen till detta är att vi har kvantifikatorerna att ta hänsyn till i FOL och att vi därmed behöver använda modeller med mer struktur än för satslogiken.
- Med hjälp av mängdläran kan vi lösa detta problem.



# Modeller för FOL

- Betrakta följande värld



# Modeller för FOL

- Anta att vi har tre predikat i vårt språk
  - Cube,
  - Larger och
  - =
- Samt ett namn
  - c
- Vår målsättning är nu att konstruera ett matematiskt objekt som representerar allt i vår värld som är relevant för sanningsvärdet i vårt språk.

# Modeller för FOL

- Vi behöver en representation för att vår värld innehåller 4 objekt. För att representera detta använder vi oss av en mängd  $D = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  där elementen representerar våra fyra objekt från vänster till höger.
- $D$  kallas vår domän.
- Men för att uttrycka satser behöver vi även representera predikat.
- Vi gör detta genom att tilldela varje predikat i vårt språk en mängd som vi kallar predikatets extension.

# Modeller för FOL

- Cube tilldelar vi mängden  $C_u$  där  $C_u \subseteq D$  ( $C_u$  är predikatet Cube:s extension  $\{b_1, b_2, b_3\}$ ).
- Larger tilldelar vi mängden  $L_a$  bestående av ordnade par  $\langle x, y \rangle$  där  $x, y \in D$ . Så om  $\langle x, y \rangle \in L_a$ , så representerar detta att  $x$  är större än  $y$  ( $L_a$  är predikatet Larger:s extension  $\{\langle b_2, b_1 \rangle, \langle b_3, b_1 \rangle, \langle b_3, b_2 \rangle, \langle b_2, b_4 \rangle, \langle b_3, b_4 \rangle\}$ ).
- Vi måste även tillskriva namnet  $c$  ett objekt  $b_1$  som det nämner. Detta görs vanligtvis genom en funktion som tilldelar varje namn i språket motsvarande objekt i domänen.
- Märk väl att  $=$ :s extension är given i vår domän  $D$  och utgörs av  $\{\langle b_1, b_1 \rangle, \langle b_2, b_2 \rangle, \langle b_3, b_3 \rangle, \langle b_4, b_4 \rangle\}$ .



# Modeller för FOL

- En första ordningens modell  $M$  (vanligtvis gotiskt  $M$ ) för ett första ordningens språk  $L$  är då en funktion från predikaten, individkonstanterna (egentligen även funktionssymbolerna) och allkvantifikatorn i  $L$  till mängder sådan att:
  - (1)  $M(\forall) = D$  för någon icke-tom mängd  $D$  som vi kallar domänen för  $M$ .
  - (2) Om  $P$  är ett  $n$ -ställt predikat så är  $M(P)$  en mängd ordnade  $n$ -tuplar av element i  $D$ , dvs extensionen för  $P$ .
  - (3) Givet att  $c$  är vilket namn som helst i  $L$  så är  $M(c) \in D$  (och kallas då  $c$ :s referent).

# Modeller för FOL

- Ett sätt att tolka detta är att en modell för  $L$  består av en domän  $D$  tillsammans med en tilldelning av extensioner i denna domän till varje individkonstant, predikat (och funktionssymbol) i  $L$ .
- Vi kan ta detta som exempel på skillnaden mellan satslogiken och FOL: medan satslogiken bara handlar om sanningsvärden, handlar FOL om extensioner.

# Sanning i FOL

## Tarskis idé

- Vad menar vi med att en första ordningens sats är sann i en modell  $M$ ? I satslogiken var detta lätt då vi tilldelade sanningsvärden direkt till satserna. I FOL går inte detta: för att bygga upp satser här behöver vi formler med fria variabler, och sanningsvärdena på dessa måste bero på vad variablerna tar för värden (dvs refererar till).
- Säg att vi skulle tilldela sanningsvärde till  $P(x)$ . Hur skulle vi räkna ut sanningsvärdet på  $\forall xP(x)$  eller  $\exists xP(x)$  från detta?
- Detta problem löstes av Alfred Tarski (1902-1983), skaparen av FOL:s modellteori i artikeln "The concept of truth in formalized languages" (1933).

# Sanning i FOL

## Tarskis idé

A definition of truth can be obtained in a very simple way from that of another semantic notion, namely, of the notion of *satisfaction*.

Satisfaction is a relation between arbitrary objects and certain expressions called "*sentential functions*." These are expressions like "*x is white*," "*x is greater than y*," etc. Their formal structure is analogous to that of sentences; however, they may contain the so-called free variables (like 'x' and 'y' in "*x is greater than y*"), which cannot occur in sentences.

In defining the notion of a sentential function in formalized languages, we usually apply what is called a "recursive procedure"; i.e., we first describe sentential functions of the simplest structure (which ordinarily presents no difficulty), and then we indicate the operations by means of which compound functions can be constructed from simpler ones. Such an operation may consist, for instance, in forming the logical disjunction or conjunction of two given functions, i.e., by combining them by the word "*or*" or "*and*." A sentence can now be defined simply as a sentential function which contains no free variables

As regards the notion of satisfaction, we might try to define it by saying that given objects satisfy a given function if the latter becomes a true sentence when we replace in it free variables by names of given objects. In this sense, for example, snow satisfies the sentential function "*x is white*" since the sentence "*snow is white*" is true. However, apart from other difficulties, this method is not available to us, for we want to use the notion of satisfaction in defining truth.

# Sanning i FOL

## Tarskis idé

To obtain a definition of satisfaction we have rather to apply again a recursive procedure. We indicate which objects satisfy the simplest sentential functions; and then we state the conditions under which given objects satisfy a compound function -- assuming that we know which objects satisfy the simpler functions from which the compound one has been constructed. Thus, for instance, we say that given numbers satisfy the logical disjunction "*x is greater than y or x is equal to y*" if they satisfy at least one of the functions "*x is greater than y*" or "*x is equal to y*."

Once the general definition of satisfaction is obtained, we notice that it applies automatically also to those special sentential functions which contain no free variables, i.e., to sentences. It turns out that for a sentence only two cases are possible: a sentence is either satisfied by all objects, or by no objects. Hence we arrive at a definition of truth and falsehood simply by saying that *a sentence is true if it is satisfied by all objects, and false otherwise*.

(It may seem strange that we have chosen a roundabout way of defining the truth of a sentence, instead of trying to apply, for instance, a direct recursive procedure. The reason is that compound sentences are constructed from simpler sentential functions, but not always from simpler sentences; hence no general recursive method is known which applies specifically to sentences.)

# Sanning i FOL

## Satisfiering

- Vi kommer nu att översiktligt beskriva det formella genomförandet av Tarskis procedur.
- En *variabeltilldelning* i modellen  $M$  är en funktion  $g$  från variablerna i språket  $L$  till element i  $M(\forall)$ , dvs en tilldelning av element i  $M$ :s domän till variabler.
- Låt  $M$  vara en modell med domän  $D$ . En variabeltilldelning i  $M$  är en funktion  $g$  definierad på en mängd variabler som tar ett värde i  $D$ .

# Sanning i FOL

## Satisfiering

- Exempel: givet att  $D = \{a, b, c\}$  så är följande variabeltilldelningar i  $M$ :
  1. Funktionen  $g_1$  som tilldelar  $b$  till  $x$
  2. Funktionen  $g_2$  som tilldelar  $a$ ,  $b$  och  $c$  till  $x$ ,  $y$  och  $z$
  3. Funktionen  $g_3$  som tilldelar  $b$  till alla variabler i språket
  4. Funktionen  $g_4$  som är den tomma funktionen (vanligtvis  $g_\emptyset$ ) som inte tilldelar något värde till någon variabel.

# Sanning i FOL

## Satisfiering

- En variabeltilldelning  $g$  för en wff  $P$  sägs vara *lämplig* om  $g$  tilldelar ett värde (objekt) till alla fria variabler i  $P$ .
1. Därmed är  $g_1$  lämplig för vilken wff som helst med en fri variabel  $x$  (eller inga fria variabler alls).
  2. Funktionen  $g_3$  är lämplig för vilken wff som helst.
  3. Den tomma funktionen  $g_4$  är lämplig för vilken wff som helst som saknar fria variabler (alltså satser).



# Sanning i FOL

## Satisfiering

- Vi ska nu definiera vad det innebär för en variabeltilldelning  $g$  att satisfiera en wff  $P(x_1, \dots, x_n)$  i  $M$ .
- För att fånga kvantifikatorerna behöver vi införa en operation på tilldelningar. Vi skriver  $g[x / c]$  för den tilldelning som är precis som  $g$  förutom att den tilldelar elementet  $c \in D$  till variabeln  $x$  istället för vad  $g$  tilldelar.
- Säg t.ex. att  $g$  tilldelar  $x$  och vi vill veta vad det betyder för  $g$  att satisfiera wff  $\forall z \text{ Likes}(x, z)$ .
- Vi kan då ta vilket objekt  $b$  som helst i vår domän och betrakta de variabeltilldelningar som är precis som  $g$  förutom att de tillskriver  $b$  till  $z$ .
- Vi säger då att  $g$  satisfierar  $\forall z \text{ Likes}(x, z)$  om *varje*  $g[z / b]$  satisfierar  $\text{Likes}(x, z)$ .

# Övning

1. Funktionen  $g_1$  tilldelar  $b$  till  $x$ . Vad tilldelar  $g_1[y / c]$  och  $g_1[x / c]$ ?
2. Funktionen  $g_2$  tilldelar  $a$ ,  $b$  och  $c$  till  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Vad tilldelar  $g_2[x / b]$  och  $g_2[u / c]$ ?
3. Funktionen  $g_3$  tilldelar  $b$  till alla variabler. Vad tilldelar  $g_3[y / b]$  och  $g_3[y / c]$ ?
4. Funktionen  $g_4$  tilldelar inte något värde till någon variabel. Vad tilldelar  $g_4[x / b]$ ?

# Sanning i FOL

## Satisfiering

- En värdering i språket  $L$  baserad på tilldelningen  $g$  definierar vi som en funktion  $||\_||_g^M$  från termer (variabler eller individkonstanter) i  $L$  till element i  $D$  sådan att:
  1.  $||x||_g^M = g(x)$  för alla variabler  $x$
  2.  $||c||_g^M = M(c)$  för alla individkonstanter  $c$ .
- Detta är ett typexempel på en induktiv definition: värderingen av variabler bestäms av en variabeltilldelning och värderingen av individkonstanter av modellen.
- För en analys av begreppet läs kapitel 17.

# Sanning i FOL

## Satisfiering

- Vi kan nu definiera vad det innebär att för en variabeltilldelning  $g$  att satisfiera en wff  $P$  i  $M$ .
- **Definition av satisfiering.** Låt  $P$  vara en wff och låt  $g$  vara en tilldelning i  $M$  för  $D$  som är lämplig för  $P$ .
  1. **Atomära formler.** Anta att  $P$  är  $R(t_1, \dots, t_n)$  ( $t$  är här en term) där  $R$  är ett  $n$ -ställt predikat.  $g$  satisfierar då  $P$  i  $M$  omm  $n$ -tupeln  $\langle \llbracket t_1 \rrbracket \llbracket g^M \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket \llbracket g^M \rrbracket \rangle \in M(R)$ .
  2. **Negation.** Antag att  $P$  är  $\neg Q$ .  $g$  satisfierar då  $P$  i  $M$  omm  $g$  inte satisfierar  $Q$ .
  3. **Konjunktion.** Antag att  $P$  är  $Q \wedge R$ .  $g$  satisfierar då  $P$  i  $M$  omm  $g$  satisfierar både  $Q$  och  $R$ .

# Sanning i FOL

## Satisfiering

- **Disjunktion.** Antag att  $P$  är  $Q \vee R$ .  $g$  satisfierar då  $P$  i  $M$  omm  $g$  satisfierar  $Q$  eller  $R$ .
- **Implikation.** Antag att  $P$  är  $Q \rightarrow R$ .  $g$  satisfierar då  $P$  i  $M$  omm  $g$  inte satisfierar  $Q$  eller  $g$  satisfierar  $R$  eller både  $R$  och  $Q$ .
- **Ekvivalens.** Antag att  $P$  är  $Q \equiv R$ .  $g$  satisfierar då  $P$  i  $M$  omm  $g$  satisfierar både  $Q$  och  $R$  eller varken  $Q$  eller  $R$ .
- **Universell kvantifikation.** Antag att  $P$  är  $\forall vQ$ .  $g$  satisfierar då  $P$  i  $M$  omm för alla  $d \in D$ , gäller att  $g[v / d]$  satisfierar  $Q$ .
- **Existentiell kvantifikation.** Antag att  $P$  är  $\exists vQ$ .  $g$  satisfierar då  $P$  i  $M$  omm för något  $d \in D$ , gäller att  $g[v / d]$  satisfierar  $Q$ .

# Sanning i FOL

Ett exempel på satisfiering

- Låt oss betrakta en modell  $M$  med domänen  $D = \{a, b, c\}$ .
- Låt oss även anta att vårt språk innehåller det tvåstelliga predikatet Likes och att extensionen för detta predikat är:

$$M(\text{Likes}) = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle c, a \rangle\}$$

- Betrakta då

$$\exists y(\text{Likes}(x, y) \wedge \neg \text{Likes}(y, y))$$

# Sanning i FOL

Ett exempel på satisfiering

- Det verkar som om vår tilldelning  $g$  satisfierar denna formel omm  $g$  tilldelar  $a$  till variabeln  $x$  (eftersom  $a$  är det enda objektet som gillar någon som inte gillar sig själv).
- Notera att  $g$  måste tilldela något värde till  $x$ , eftersom den måste vara lämplig för formeln.
- Låt oss kalla detta värde  $e$  (där  $e$  är antingen  $a$ ,  $b$  eller  $c$ ).
- Vi ser att enligt definitionen på satisfiering för  $\exists$  att  $g$  satisfierar formeln omm för något  $d \in D$ , gäller att  $g[y / d]$  satisfierar  $\text{Likes}(x, y) \wedge \neg \text{Likes}(y, y)$ .

# Sanning i FOL

Ett exempel på satisfiering

- Men  $g[y / d]$  satisfierar  $\text{Likes}(x, y) \wedge \neg \text{Likes}(y, y)$  omm det satisfierar  $\text{Likes}(x, y)$  men inte  $\text{Likes}(y, y)$ .
- Men detta är enbart sant om paret  $\langle e, d \rangle$  är i extensionen av  $\text{Likes}$  och  $\langle d, d \rangle$  är inte det.
- Detta kan ju endast hända om  $e = a$  och  $d = b$ .
- Alltså är det enda sättet för  $g$  att satisfiera vår formel om den tilldelar  $a$  till  $x$  (precis som vi antog).



# Sanning i FOL

Definitionen på sanning i en modell

- Vi kan nu definiera **sanning** enligt följande:

Låt  $L$  vara något första ordningens språk och  $M$  en modell för  $L$ . En sats  $P$  i  $L$  är sann i  $M$  om den tomma variabeltilldelningen  $g_{\emptyset}$  satisfierar  $P$  i  $M$  (annars är  $P$  falsk).

OBS! Vi skriver vanligtvis  $M \models P$  om  $P$  är sann i  $M$

# Sanning i FOL

Ett exempel på sanning (och falskhet) i  $M$

- Betrakta satsen:

$$\exists x \exists y (\text{Likes}(x, y) \wedge \neg \text{Likes}(y, y))$$

- Är den sann i  $M$ ?
- Eftersom det är en sats så är  $g_\emptyset$  lämplig.
- Satisfierar  $g_\emptyset$  satsen?
- Enligt definitionen på satisfiering så gör den det omm det finns minst ett objekt som vi kan tilldela  $x$  så att

$$\exists y (\text{Likes}(x, y) \wedge \neg \text{Likes}(y, y))$$

kommer ut som sann.

# Sanning i FOL

Ett exempel på sanning (och falskhet) i  $M$

- Gör den det?
- Ja, vi har redan sett att  $a$  satisfierar formeln.
- Alltså måste  $\exists x \exists y (\text{Likes}(x, y) \wedge \neg \text{Likes}(y, y))$  vara sann i  $M$ .
- Men betrakta då  $\forall x \exists y (\text{Likes}(x, y) \wedge \neg \text{Likes}(y, y))$
- Satisfierar  $g_\emptyset$  satsen?
- $g_\emptyset$  satisfierar satsen omm det för *varje* objekt  $e$  i domänen gäller att om vi tilldelar  $e$  till  $x$ , så satisfierar tilldelningen  $g$ :

$$\exists y (\text{Likes}(x, y) \wedge \neg \text{Likes}(y, y))$$

- Men  $g$  satisfierar endast denna formel om  $g$  tilldelar  $a$  till  $x$ . Om den exempelvis tilldelar  $b$  till  $x$  så satisfieras inte formeln.
- Alltså är satsen falsk i  $M$ .

# Sanning i FOL

## FO-konsekvens och FO-giltighet

- Med hjälp av vår definition av sanning i  $M$  kan vi även lätt definiera FO-konsekvens och FO-giltighet.

En sats  $Q$  är en **FO-konsekvens** av en mängd satser  $T = \{P_1, \dots\}$  omm alla modeller som gör samtliga satser i  $T$  sanna även gör  $Q$  sann.

En sats  $P$  är **FO-giltig** omm alla modeller gör  $P$  sann.