Filosofisk logik
Kapitel 10 och 11 (forts.)

Robin Stenwall
Lunds universitet

Viktigt att tänka på

- Innehållet i kursen formell logik förutsätts vara inhämtat (repetera om du är osäker).
- I allmänhet gäller att kursinnehållet, som ska instuderas på relativt kort tid, är till karaktären abstrakt och kräver mognad och tid för att absorberas.
- Det är därför viktigt att:
  - Läsa kursinnehållet
  - Delta i undervisningen
  - Förbereda sig inför varje föreläsning

Kurslitteraturen

- I princip fortsätter vi där vi slutade i LPL.
- Följande avsnitt ur LPL ingår i kursen:
  - Kapitel 10: 10.3-10.4
  - Kapitel 11: 11.7
  - (Kapitel 12: 12.1-12.4)
  - (Kapitel 13: 13.1-13.4)
  - (Kapitel 14: 14.1-14.3)
  - Kapitel 15: 15.1-15.10
  - Kapitel 18: 18.1-18.3
  - Kapitel 19: 19.1, 19.8
  - Mer kan komma att ingå beroende på hur långt vi kommer.

Om kursen

- (A) *Predikatlogik (forts.)* Vi kommer främst att diskutera prenex normalform, men även numerisk kvantifikation och kvantifikatorernas logik.

- (B) *Mängdläran* är nödvändig för att förstå vissa metalogiska resultat, men är även användbart för en filosof. Det utgör dessutom ett bra exempel på en formell teori som faktiskt används. Vi kommer att diskutera praktiskt tillämpbar mängdlära och några filosofisk-logiska resultat, såsom Russells paradox.

- (C) *Metalogik* handlar om formella egenskaper hos logiska system såsom sundhet och fullständighet, samt om viktiga logiska och semantiska begrepp (t.ex. sanning och modell), samt om tolkningar av logiska system. Vi kommer framförallt ge en översikt över detta område såsom det är tillämpbart på FOL.

- (D) *Definition, induktion & aritmetik* (kap. 16). Ett mindre avsnitt som syftar till att ge ytterligare ett exempel på en formell teori, och som dessutom introducerar metoder som är användbara inom all logik och matematik.

Betygskriterier

Mål	Godkänt	Väl godkänt
Redogöra för samtida teoretisk-filosofisk teoribildning inom mängdlära och metalogik.	Studenten kan adekvat redogöra för samtida teoretisk-filosofisk teoribildning inom mängdlära och metalogik.	Studenten kan på ett problematiserande och adekvat sätt redogöra för samtida teoretisk-filosofisk teoribildning inom mängdlära och metalogik.
Redogöra för grundprinciperna för härledning och översättning i predikatlogik med kvantifikatorer.	Studenten kan på ett grundläggande och korrekt sätt redogöra för grundprinciperna för härledning och översättning i predikatlogik med kvantifikatorer.	Studenten kan på ett detaljerat och korrekt sätt redogöra för grundprinciperna för härledning och översättning i predikatlogik med kvantifikatorer.
Utföra översättningar och härledningar i predikatlogik med kvantifikatorer.	Studenten kan på ett tillfredställande sätt utföra översättningar och härledningar i predikatlogik med kvantifikatorer.	Studenten kan på ett skickligt sätt utföra översättningar och härledningar i predikatlogik med kvantifikatorer.
Identifiera samt ta ställning till vilken roll logiska grundantaganden spelar för hur enskilda teorier eller argument skall värderas.	Studenten har förstått och kan redogöra för vilken roll logiska grundantaganden spelar för hur enskilda teorier eller argument skall värderas.	Studenten har en insikt i och kan föra en fördjupande och problematiserande diskussion om vilken roll logiska grundantaganden spelar för hur enskilda teorier eller argument skall värderas.

Avsnitt 10.3 Några nyttiga ekvivalenser

- Två sätt att använda tautologa ekvivalenser i första-ordningens logik

(1) Satser vars sanningsfuntionella former är tautologt ekvivalenta är FO-ekvivalenta.

Exempel: Följande satser är FO-ekvivalenta

$\neg(\exists x\ \mathrm{Cube}(x) \land \forall y\ \mathrm{Dodec}(y))$

$\neg\exists x\ \mathrm{Cube}(x) \lor \neg\forall y\ \mathrm{Dodec}(y)$

(2) Men vi kan även använda DeMorgans lagar och andra tautologa ekvivalenser inuti formler.

Exempel: Följande satser är FO-ekvivalenta:

$$\forall x(\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \mathrm{Small}(x))$$
$$\forall x(\neg \mathrm{Small}(x) \rightarrow \neg \mathrm{Cube}(x))$$

Notera att de wffs som binds av kvantifikatorerna kommer att satisfieras av exakt samma objekt i varje möjlig situation.

Avsnitt 11.7 Prenex normalform

- Det är ibland bekvämare att hantera formler där samtliga kvantifikatorer har flyttats till början av uttrycket. Dessa typer av formler sägs vara i prenex normalform.
- Definition: En formel är i prenex normalform om den antigen saknar kvantifikatorer eller samtliga kvantifikatorer står i början av formeln, dvs om den har följande form:

$$K_1x_1\, K_2x_2, \ldots\, K_nx_n\, B$$

där $K_i (i = 1, \ldots n)$ är antingen $\forall$ eller $\exists$ och formeln B är fri från kvantifikatorer.

OBS! En formel utan kvantifikatorer betraktas som ett trivialt fall av en formel i prenex normalform.

- Övning: vilka av följande uttryck står i prenex normalform?

$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

$\forall x \forall y \neg (P(x) \rightarrow Q(y))$

$\forall x \exists y R(x, y)$

$R(x, y)$

$\neg \forall x R(x,y)$

En algoritm för prenex normalform

- Alla satser är logiskt ekvivalenta med någon sats i prenex normalform. För att omvandla en sats (vilken som helst) till prenex normalform använder vi oss av följande steg (arbeta inifrån ut):
  - 1. Eliminera samtliga förekomster av $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$ från formeln ifråga.
  - 2. Flytta alla negationstecken inåt i formeln så att de bara figurerar i literaler (alltså formler som antigen är atomära eller negerade atomära formler).
  - 3. Om nödvändigt skriv om formeln så att inte två kvantifikatorer binder samma variabler och så att ingen variabel har både fria och bundna förekomster.
  - 4. Vi erhåller nu en formel i prenex normalform genom att flytta samtliga kvantifikatorer till början av formeln.

Steg 1.

- Använd er av följande ekvivalenser när ni eliminerar förekomsterna av → och ↔:

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Steg 2.

- Använd er av följande ekvivalenser när ni flyttar negations-tecken inåt i en formel:

- DeMorgans lagar
  - $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
  - $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
  - $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

- DeMorgans lagar för kvantifikatorer
  - $\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
  - $\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$

Övningar

- Flytta negationstecknet inåt (så långt det går) i följande formler:
  - $\neg\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
  - $\neg\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

Steg 3.

- Använd er av följande resultat när ni standardiserar isär variablerna:
  - För vilken wff P(x) som helst och variabel y sådan att y inte figurerar i P(x) gäller följande:
  - $\forall x P(x) \Leftrightarrow \forall y P(y)$
  - $\exists x P(x) \Leftrightarrow \exists y P(y)$

- Övning: standardisera isär svariablerna i följande formel:
  - $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists x Q(x) \wedge \exists z P(z)$
- Lösning: Ersätt x med y i $\exists x Q(x)$ för att erhålla:
  - $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists y Q(y) \wedge \exists z P(z)$

Steg 4.

- Använd er av följande ekvivalenser när ni flyttar kvantifikatorerna till början av formeln:
  - För varje FO-formel P i vilken x inte är fri gäller:
    - $\forall x P \Leftrightarrow P$
    - $\exists x P \Leftrightarrow P$
    - $P \wedge \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x(P \wedge Q(x))$
    - $P \wedge \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x(P \wedge Q(x))$
    - $P \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x(P \vee Q(x))$
    - $P \vee \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x(P \vee Q(x))$

Kvantifiering på tomgång (eng. *null quantification*)

- När vi definierade wffs så krävde vi inte att den variabel som vi kvantifierade över är fri (eller förekommer överhuvudtaget) i den formel som kvantifikatorn appliceras på.
- Exempelvis är ∀xCube(b) en wff även om Cube(b) inte innehåller den fria variabeln x.
- Betrakta då ∀xCube(b). Denna sats kommer ut som sann i en värld om och endast om alla objekt inom domänen satisfierar formeln Cube(b). Men vad betyder detta?
- Om du ersätter varje förekomst av x i Cube(b) med namnet n_1, så kommer resultatet att vara Cube(b). Så frågan om något objekt satisfierar Cube(b) är samma sak som att fråga om Cube(b) är sann. Därmed kommer ∀xCube(b) och Cube(b) att vara sanna i exakt samma världar—de är m.a.o. logiskt ekvivalenta.

Några andra nyttiga ekvivalenser i steg 4.

- $\forall x P(x) \land \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \land Q(x))$
- $\exists x P(x) \lor \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \lor Q(x))$
  - OBS! $\forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$ är inte logiskt ekvivalent med $\forall x(P(x) \lor Q(x))$ och $\exists x P(x) \land \exists x Q(x)$ är inte ekvivalent med $\exists x(P(x) \land Q(x))$.

- $\forall x \forall y P(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x P(x, y)$
- $\exists x \exists y P(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x P(x, y)$
- $K_1 x P(x) \land K_2 y Q(y) \Leftrightarrow K_1 x K_2 y(P(x) \land Q(y))$
- $K_1 x P(x) \lor K_2 y Q(y) \Leftrightarrow K_1 x K_2 y(P(x) \lor Q(y))$, där K_1 och K_2 är antigen $\forall$ eller $\exists$.

Exempelvis om $K_1 = \forall$ och $K_2 = \exists$, så är $\forall x P(x) \land \exists y Q(y) \Leftrightarrow \forall x \exists y(P(x) \land Q(y))$.

Ett exempel

- Hitta prenex normalformen för:
  - $\forall x((\exists y R(x, y) \wedge \forall y \neg S(x, y)) \rightarrow \neg(\exists y R(x, y) \wedge P))$
  - Enligt steg 1. måste vi eliminera $\rightarrow$
  - $\forall x(\neg(\exists y R(x, y) \wedge \forall y \neg S(x, y)) \vee \neg(\exists y R(x, y) \wedge P))$
  - Enligt steg 2. måste vi flytta negationstecknet inåt
  - $\forall x(\neg \exists y R(x, y) \vee \neg \forall y \neg S(x, y) \vee \neg \exists y R(x, y) \vee \neg P)$
  - $\forall x(\forall y \neg R(x, y) \vee \exists y S(x, y) \vee \forall y \neg R(x, y) \vee \neg P)$
  - I steg 3. standardiserar vi isär variablerna
  - $\forall x(\forall y \neg R(x, y) \vee \exists y_1 S(x, y_1) \vee \forall y_2 \neg R(x, y_2) \vee \neg P)$
  - I steg 4. flyttar vi samtliga kvantifikatorer till början av formeln:
  - $\forall x \forall y \exists y_1 \forall y_2(\neg R(x, y) \vee S(x, y_1) \vee \neg R(x, y_2) \vee \neg P)$

Övningar

- Ändra följander satser till prenex normalform:
- $\exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$
- $(\exists x P(x) \lor R(b)) \rightarrow \forall x(P(x) \land \forall x Q(x))$
- $\exists z(\exists x Q(x, z) \lor \exists x P(x)) \rightarrow \neg(\neg\exists x P(x) \land \forall x \exists z Q(z, x))$

Kom ihåg att varje steg i serien måste vara logiskt ekvivalent