

Formell logik

Kapitel 11

Robin Stenwall
Lunds universitet

Kapitel 11: Satser med flera kvantifikatorer

- I kapitel 9 och 10 fokuserade vi på satser som innehåller en kvantifikator
- Det var tillräckligt för att uttrycka de fyra aristoteliska satsformerna
- Många vardagsspråkliga yttranden innehåller dock flera kvantifikatorer
- Exempel: "Alla gillar någon"

Avsnitt 11.1 Satser med flera kvantifikatorer av samma sort

- Vad säger följande satser?

$\exists x \exists y [Cube(x) \wedge Tet(y) \wedge LeftOf(x, y)]$

$\forall x \forall y [(Cube(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow LeftOf(x, y)]$

Om bruket av olika variabler

- Vad säger följande satser?

$$\forall x \forall y [(Cube(x) \wedge Cube(y)) \rightarrow (LeftOf(x, y) \vee RightOf(x, y))]$$

$$\forall x \forall y [(Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge x \neq y) \rightarrow (LeftOf(x, y) \vee RightOf(x, y))]$$

- Varning: att variablerna är olika betyder inte att de objekt de kan ta som värden måste vara olika

Avsnitt 11.2: Blandade kvantifikatorer

- Exempel på satser med flera olika kvantifikatorer:

$\forall x \exists y \text{ Gillar}(x, y)$

$\forall x [\text{Cube}(x) \rightarrow \exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{LeftOf}(x, y))]$

Om kvantifikatorens ordning

- Antag att vi har flera kvantifikatorer direkt efter varandra i en sats
- Kvantifikatorens ordning spelar ingen roll när alla är av samma sort
- Exempel

$$\forall x \forall y \text{ Gillar}(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x \text{ Gillar}(x, y)$$

$$\exists x \exists y \text{ Gillar}(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x \text{ Gillar}(x, y)$$

- Men betrakta följande satser:

$\forall x \exists y \text{ Gillar}(x, y)$ ("Alla gillar någon")

$\forall x \exists y \text{ Gillar}(y, x)$ ("Alla gillas av någon")

$\exists x \forall y \text{ Gillar}(x, y)$ ("Någon gillar alla")

$\exists x \forall y \text{ Gillar}(y, x)$ ("Någon gillas av alla")

- Alltså: Om kvantifikatorerna är av olika sort, kan deras ordning vara högst väsentlig

- Med hjälp av blandade kvantifikatorer kan vi uttrycka att det finns *exakt ett* objekt av en viss typ
- Exempel: Hur ska vi uttrycka att det finns exakt en kub?

”Det finns någonting, x , som är en kub och, för alla y , om y är en kub så är y identisk med x ”

Formel:

$$\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \forall y (\text{Cube}(y) \rightarrow y = x))$$

Avsnitt 11.3: Översättning steg för steg

Exempel: Översätt: "Varje kub befinner sig till vänster om en tetraeder" till FOL

Steg 1: Vi noterar att satsen säger någonting om alla kuber

$$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow x \text{ befinner sig till vänster om en tetraeder})$$

Steg 2: Översätt "x befinner sig till vänster om en tetraeder"

$$\exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{LeftOf}(x, y))$$

Steg 3: Kombinera!

$$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{LeftOf}(x, y)))$$

Annat exempel: översätt ”Allting till höger om en stor kub är litet”

Steg 1: $\forall x$ (x är till höger om en stor kub \rightarrow x är litet)

Steg 2: Vi översätter ”x är till höger om en stor kub”

$$\exists y (\text{Cube}(y) \wedge \text{Large}(y) \wedge \text{RightOf}(x, y))$$

Steg 3: Vi översätter ”x är litet”

$$\text{Small}(x)$$

Steg 4: Kombinera!

$$\forall x (\exists y (\text{Cube}(y) \wedge \text{Large}(y) \wedge \text{RightOf}(x, y)) \rightarrow \text{Small}(x))$$

Avsnitt 11.4: Satser i behov av omskrivning (parafrasering)

- Översätt: "Om en student följer en logikkurs, så måste han eller hon vara smart"
- Att tillämpa steg-för-steg-metoden direkt på denna sats leder till nonsens
- Satsen måste först skrivas om så att dess sanna logiska struktur framträder
- Resultat av omskrivning: "Varje student som går en logikkurs är smart"

Avsnitt 11.4: Satser i behov av omskrivning (parafrasering)

- Många satser i vardagsspråket är mångtydiga
- Satser i FOL har alltid en entydig innebörd (förutsatt att de ingående predikaten har det)
- Mångtydigheten gäller ofta kvantifikatorernas ordning
- Problem: Vilken innebörd ska man i så fall välja att översätta till FOL?
- Svaret ges oftast av sammanhanget

Exempel (från boken)

Jämför:

”Varje minut rånas en man i New York City. Få rapporterar rånerna till polisen”

”Varje minut rånas en man i New York City. I kväll ska vi intervjua honom”

Betydelse 1

$$\forall x (\text{Minut}(x) \rightarrow \exists y (\text{Man}(y) \wedge \text{RånasUnder}(y, x)))$$

Betydelse 2

$$\exists y (\text{Man}(y) \wedge \forall x (\text{Minut}(x) \rightarrow \text{RånasUnder}(y, x)))$$

Övningar

- Översätt följande satser till FOL:

”Någon hemul är kär i alla filifjonkor”

”Det finns exakt en stor hemul”

”Varje hemul som är kär i en filifjonka tänker på hen”

”Allting med ingenting bakom sig är stort”

”Alla försiktiga hemuler bor i ett stort hus”