Filosofisk logik
Kapitel 15

Robin Stenwall
Lunds universitet

Dagens upplägg

- Första ordningens mängdlära
  - Naiv mängdlära
    - Abstraktionsaxiomet (eg. comprehension)
    - Extensionalitetsaxiomet
  - Små mängder
  - Ordnade par
  - Mängdteoretiska operationer
    - Union
    - Snitt
  - Mängdteoretiska modeller
    - Relationer
    - Funktioner
  - Delmängder
  - Potensmängder

Vad är en mängd?

- Mängdläran är läran om mängder. Men vad är en mängd?

  (A) *En mängd är en klass*: extensionen av ett predikat, ett begrepp eller ett villkor (allt som uppfyller villkoret). En logisk tolkning som förknippas med Frege.

  (B) *En mängd är en samling av ting*, samlade i tanken till ett annat ting. Mängden som sådan har ingen nödvändig koppling till något begrepp. En matematisk tolkning som förknippas med Cantor.

Naiv mängdlära

- En mängd är ett objekt, vartill en eller flera antal andra objekt står i relationen *medlemskap* (med ett undantag).
- Om b är en mängd och a är ett objekt skriver vi:

$$a \in b,$$

omm a är en medlem i b (alt. a är ett *element* i b)

OBS! $\neg(a \in b)$ skriver vi som $a \notin b$

Naiv mängdlära

- Låt x, y, z… vara variabler över domänen av alla objekt, och a, b, c, vara variabler över domänen av mängder.
- Vi kan specificera en mängd på två sätt:
  - (i) genom att räkna upp dess medlemmar. Om b innehåller talen 1, 6 och 7, och ingenting annat, så skriver vi $\{1, 6, 7\}$. Detta sätt korresponderar mot tolkning (B).
  - (ii) genom att ge ett villkor som alla dess medlemmar och inga andra uppfyller. Om t.ex. b är mängden av alla udda tal, predikatet T(x) uttrycker att x är ett tal, och U(x) att x är udda, skriver vi $b = \{x \mid T(x) \wedge U(x)\}$ (uttalas ”b är mängden av de x sådana att T(x) och U(x)”). Detta sätt korresponderar mot tolkning (A).

Naiv mängdlära
Extensionalitetsaxiomet

- Från tolkning (A) och (B) ovan går det att motivera att mängden a är identisk med mängden b omm de har exakt samma medlemmar. Detta kallas för *extensionalitetsaxiomet* och betyder att en mängd bestäms entydigt av att vi för alla objekt bestämmer om de ingår i mängden eller inte. Vi skriver axiomet i FOL som följande:

$$\forall a \forall b(\forall x(x \in a \equiv x \in b) \rightarrow a = b)$$

OBS! Ordningen har ingen betydelse. Detta innebär att det är meningslöst att påstå att en mängd innehåller två exemplar av någonting: antingen ingår objektet eller så gör det inte det, och det finns ingenting sådant som att ingå ”två gånger”.

Naiv mängdlära

Abstraktionsaxiomet (eng. comprehension)

- Den andra principen i den naiva (intuitiva mängdläran).
- Den säger att för varje formel P(x) i FOL med fri variabel x entydigt bestämmer en mängd – närmare bestämt mängden av alla ting som gör P(x) till en sann sats om x tar någon av dem som värde:

$$\exists a \forall x (x \in a \equiv P(x))$$

OBS! Detta är egentligen ett axiomschema snarare än ett enskilt axiom eftersom P(x) kan vara vilken formel som helst. Om a är mängden av objekt som uppfyller villkoret P(x), så skriver vi $a = \{x \mid P(x)\}$.

Naiv mängdlära
Abstraktionsaxiomet

- Som nämndes innan är ett annat sätt att specificera en mängd att räkna upp dess medlemmar: $a = \{c, d, e\}$. Detta kan ses som en förkortning av:

$$a = \{x \mid x = c \lor x = d \lor x = e\}$$

- Från detta följer att $\{c, d, e, d, c\} = \{d, c, e, e\}$ då:

$$\forall x((x = c \lor x = d \lor x = e \lor x = d \lor x = c) \equiv$$

$$(x = d \lor x = c \lor x = e \lor x = e))$$

är en logisk sanning.

Övning 1

- Låt $U = \{x \mid NaturligtTal(x)\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 6, 7, 8\}$, $C = \{1, 2, \{3\}, 4\}$

- Är följande satser sanna eller falska?
  - (a) $2 \in A$
  - (b) $11 \in B$
  - (c) $4 \notin B$
  - (d) $A \in U$
  - (e) $A = \{x \mid JämntTal(x)\}$
  - (f) $\{3, 4, 5, 6\} = \{x \mid x \geq 3 \text{ och } x \leq 6\}$
  - (g) $3 \in C$
  - (h) $\{3\} \in C$

Små mängder
Tomma mängden

- Från den naiva mängdlärans två axiom följer existensen av många mängder. Den minsta mängden är den tomma mängden:

$$\varnothing =_{df.} \{x \mid x \neq x\}$$

- Denna kan vara svår att tolka som något som vi vanligen ser som en ”mängd” eller ”samling”, men den är lätt att tolka som extensionen av ett begrepp (begreppet att inte vara självidentiskt).

Små mängder
Singletonmängden (alt. enhetsmängden)

- Något större är singletonmängden av varje objekt c, varmed vi menar den mängd som bara innehåller c och inget annat. Denna definieras som:

$$\{c\} =_{df.} \{x \mid x = c\}$$

- Mängder med två element definieras som:

$$\{c, d\} =_{df.} \{x \mid x = c \vee x = d\}$$

för varje par av element c, d.

OBS! Existensen av alla dessa mängder följer från abstraktionsaxiomet, och deras unikhet från extensionalitetsaxiomet.

Ordnade par

- Med hjälp av existensen av par och singletonmängder kan vi också definiera *ordnade par*.

- Ett ordnat par är ett där både ordningen och antalet förekomster av varje objekt har betydelse. De skrivs vanligtvis som $\langle c, d \rangle$. Den princip som ett sådant objekt måste uppfylla är:

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \equiv (a = c \wedge b = d)$$

- Detta skiljer sig från oordnade par som istället uppfyller:

$$\{a, b\} = \{c, d\} \equiv \forall x((x = a \vee x = b) \equiv (x = c \vee x = d))$$

vilket följer ur extensionalitetsaxiomet.

Några nyttiga mängdteoretiska operationer

- Från två mängder a och b kan vi bilda följande nya mängder:
  - Snittet av a och b ($a \cap b$, eng. intersection). Denna mängd innehåller allt som finns i *både* a och b:

    $$a \cap b =_{df.} \{x \mid x \in a \wedge x \in b\}$$

  - Unionen av a och b ($a \cup b$). Denna mängd innehåller det som finns i a *och* det som finns i b (alt. den mängd som innehåller de objekt som är element i a *eller* b):

    $$a \cup b =_{df.} \{x \mid x \in a \vee x \in b\}$$

  - Differensen av a och b ($a \setminus b$, alt. $a - b$). Denna mängd innehåller alla element i a som inte är element i b:

    $$a \setminus b =_{df.} \{x \mid x \in a \wedge x \notin b\}$$

Övning 2

Låt U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, *A* = {2, 4, 6, 8, 10}, *B* = {1, 3, 6, 7, 8} och *C* = {3, 7}

$A \cap B = \{?\}$

$A \cup C = \{?\}$

$A \setminus B = \{?\}$

Låt A = {1, 3, 3, 7, 8, 9, 1, 2} och B = {1, 4}. Lista elementen för följande mängder:

$A \cup B = \{?\}$

$A \cap B = \{?\}$

Mängdteoretiska modeller

- Den vanligaste användningen av mängdlära är för att ”bygga” abstrakta objekt. Mängderna utgör en mycket rik struktur vari man kan tolka mer eller mindre vad som helst.
- Alt. mängdläran ger modeller för nästan alla teorier. Så länge man bryr sig om logisk struktur så räcker mängdläran ofta för att specificera en teori fullständigt.
- Med *modell* avses här tolkning. Mer specifikt är en modell av en teori en tolkning av den teorin i en annan teori, dvs en översättning av predikat $P(x_1, \ldots, x_n)$ i den första teorin till formler $S(x_1, \ldots, x_n)$ i den andra, där $x_1, \ldots, x_n$ är fria variabler.

Mängdteoretiska modeller
Relationer

- Ett exempel på sådant modellerande är tolkningen av relationer som mängder. En n-ställig relation $R(x_1, \ldots, x_n)$ kan tolkas som en mängd r vars element är ordnade n-tuplar $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, sådana att

$$R(x_1, \ldots, x_n) \equiv \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \in r$$

- Det följer att två relationer R, S för vilka $R(x_1, \ldots, x_n) \equiv S(x_1, \ldots, x_n)$ håller, tolkas som samma mängd r.
- Vi uttrycker detta genom att säga att r ger extensionen av R (och därmed även S).

Mängdteoretiska modeller
Relationer

- Många typer av relationer har speciella namn som är bra att lägga på minnet. Dessa relationer kan sägas ha en viss egenskap. Allt vad det betyder att P(x) har en viss egenskap är att vissa satser som innehåller P är sanna.

- Nedan är en lista på viktiga relationer:

Reflexivitet: $\forall x R(x, x)$

Irreflexivitet: $\forall x \neg R(x, x)$

Transitivitet: $\forall x \forall y \forall z((R(x,y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$

Symmetri: $\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$

Asymmetri: $\forall x \forall y(R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$

Antisymmetri: $\forall x \forall y((R(x, y) \wedge R(y, x)) \rightarrow x = y)$

Övning 3

- Ge exempel på en relation som är reflexiv, symmetrisk och transitiv.
- Vilka egenskaper besitter följande relationer:
  - (a) $\leq$
  - (b) likhet (som i x liknar y)
  - (c) längre än (som i x är längre än y)
  - (d) $=$

Mängdteoretiska modeller

Relationer

- En särskilt viktig typ av tvåställig relation är *ekvivalensrelationerna*. Vi säger att R är en ekvivalens omm R är reflexiv, symmetrisk och transitiv (ex. ”lika lång som”, ”lika gammal som”, ”samma färg som” etc). De är användbara eftersom de delar upp domänen i ting som är lika i något avseende.
- Givet någon ekvivalensrelation R på en mängd D, kan vi kategorisera tillsammans de objekt som tolkas som ekvivalenta under R på följande sätt: för varje $x \in D$, låt $[x]_R$ vara följande mängd:

$$\{y \in D \mid \langle x, y \rangle \in R\}$$

$[x]_R$ är alltså mängden av allt i domänen D som x står i relationen R till. $[x]_R$ kallas x’s *ekvivalensklass* under relationen R.

Mängdteoretiska modeller
Funktioner

- En funktion kan ses som en sorts relation: en som tillskriver någonting till någonting (far(max), sum(5, 4)).
- Eftersom funktioner är en sorts relationer så kan vi modellera dem i mängdläran med hjälp av ordnade par.
- Enligt LPL sägs relationen R på mängden D vara en funktion om den satisfierar följande villkor:

$$\forall x \exists^{\leq} y R(x, y)$$

- Om funktionen även uppfyller följande villkor så kallar vi den en total funktion:

$$\forall x \exists y R(x, y) \text{ (alltså } \forall x \exists ! y R(x, y))$$

Delmängder

- En viktig relation som kan hålla mellan mängder är delmängdsrelationen. Denna skriver vi som $a \subseteq b$ (uttalas ”a är en delmängd i b”) och definierar som:

$$a \subseteq b =_{df.} \forall x(x \in a \rightarrow x \in b)$$

- Det följer från definitionen och extensionalitetsaxiomet att $a = b \equiv a \subseteq b \wedge b \subseteq a$. Vi har också alltid att för vilken mängd a som helst:

$$\varnothing \subseteq a \text{ och,}$$

$$a \subseteq a$$

OBS! ”$a \subseteq b$” säger ***inte*** samma sak som ”$a \in b$”.

Potensmängder

- Med hjälp av delmängder kan vi för varje mängd a bilda potensmängden $\wp$(a) ($\wp$ kallas för Weierstrass p), definierad som:

$$\wp(a) =_{df.} \{x \mid x \subseteq a\}$$

- $\wp$(a) är alltså mängden av a's alla delmängder.

- Eftersom $\varnothing \subseteq$ a och a $\subseteq$ a, så gäller alltid att:

$$a \in \wp(a)$$

$$\varnothing \in \wp(a)$$

OBS! $\wp$(a) måste innehålla ett element för varje kombination av element i a, vilket betyder att om a har n element, så måste $\wp$(a) ha 2^n element.

Övning 4

- Vilka element innehåller följande potensmängder?
  - (a) $\wp\{a\}$
  - (b) $\wp\varnothing$
  - (c) $\wp\{a, b\}$
  - (d) $\wp\{\varnothing\}$
  - (e) $\wp\wp\{a\}$
  - (f) $\wp\{a, b, c\}$
  - (g) $\wp\wp\{a, b\}$