Filosofisk logik Kapitel 15 (forts.)

Robin Stenwall
Lunds universitet

Dagens upplägg

- Antalet element i en mängd
  - Kardinalitet
  - Humes princip
  - Cantors teorem
  - Den universella mängden
- Några mängdteoretiska paradoxer
  - Cantors paradox
  - Russells paradox
- Zermelo-Fraenkels mängdlära
  - Två axiomscheman
  - Kumulativa mängder
  - Sju axiom

Antalet element i en mängd

- Vi har sett att det antal objekt som faller under ett visst predikat kan uttryckas med hjälp av numerisk kvantifiering.
- Detta fungerar bra på predikat som ett ändligt antal objekt faller under.
- Det är också möjligt att bevisa saker för sådana tal i allmänhet, även om vi alltid måste bevisa saker om specifika tal.
  - T.ex. kan vi, givet rätt definitioner, ge ett bevis för att 2 + 1 = 1 + 2, men inte för att x + y = y + x för alla tal x och y.

Antalet element i en mängd
Humes princip

- Mängdläran ger betydligt större möjligheter: eftersom varje predikat P(x) motsvarar en mängd $\{x \mid P(x)\}$ så kan vi istället försöka mäta antalet element i sådana mängder. Men vad betyder det att mäta sådana antal?
- Humes princip(er) säger:
  - Mängderna a och b har *lika många* element omm det finns en ett-till-ett-korrespondens mellan a och b.
    - Detta uttrycks formellt som $|a| = |b|$ och vi säger att a och b har samma kardinaltal.
  - Mängden a har *minst lika må*nga element som b omm det finns en ett-till-ett-korrespondens mellan b och en delmängd av a.
    - Detta uttrycks formellt som $|b| \leq |a|$

Övningar

Låt A = {a, b, c, d, e, f, g, a, e}, B = {1, 2, 3, 4, 5 , 6, 8, 9}

- Är följande satser sanna eller falska?
- (a) $|A| = |B|$
- (b) $|A| \leq |B|$
- (c) $|B| \leq |A|$
- Vad är kardinaliteten för nedanstående mängder?
- (d) {a, 1, {42}, f, a}
- (e) {1, 2, 3, g, {x, y, z}, m}

Antalet element i en mängd

Cantors teorem

- Cantor använde ovanstående definitioner för att visa flertalet viktiga teorem inom mängdläran. Det viktigaste är:
  - **Cantors teorem**: för varje mängd a gäller att $|a| < |\wp(a)|$ ($|a| < |b|$ betyder att $|a| \leq |b|$ men $|a| \neq |b|$).
- Detta visar att för varje mängd finns det någon mängd med strikt sett fler element. Alltså finns det, för varje tal k, någon mängd som har fler än k element.
- Detta visste vi redan för ändliga tal: om a har n element så har $\wp(a)$ 2^n element.
- Men hur är det med oändliga mängder? Finns det ens sådana?

Antalet element i en mängd
Den universella mängden

- I naiv mängdlära är svaret ja. Betrakta t.ex. mängden:

$$V = \{x \mid x = x\}$$

- V följer ur abstraktionsaxiomet och kallas för den *universella mängden*. Eftersom det finns åtminstone godtyckligt ändligt antal mängder så måste V innehålla strikt fler element än alla ändliga tal, dvs |V| måste vara *oändligt*.
- Mängden av de naturliga talen $|\mathbb{N}|$ = oändlig.
- Mängden av heltalen $|\mathbb{Z}|$ = oändlig.
- Mängden av rationella tal (bråktal) |Q| = oändlig.
- Mängden av reella tal |R| = ouppräkneligt oändlig.

Mängdteoretiska paradoxer
Cantors paradox

- Naiv mängdlära är dock inkonsistent. Detta följer direkt från Cantors teorem och existensen av den universella mängden V:
  - Vi har att $\wp(V) \subseteq V$
  - Ur detta följer det att $|\wp(V)| \leq |V|$ vilket är ekvivalent med $\neg(|V| < |\wp(V)|)$.
  - Men från Cantors teorem får vi $|V| < |\wp(V)|$
  - Alltså leder antagande att det finns en mängd som innehåller allting till en motsägelse.

Mängdteoretiska paradoxer

Russells paradox

- Russell försökte år 1902 isolera vad det var i Cantors paradox som gav upphov till motsägelsen, och kom då fram till följande förenkling: från abstraktionsaxiomet följer existensen av följande mängd:

$$r = \{x \mid x \notin x\}$$

- Det är en logisk sanning att $r \in r \lor r \notin r$.
- Anta att $r \in r$
- Då håller vi $r \notin r$ enligt definitionen av r
- Så vi har både $r \in r$ och $r \notin r$
- Anta att $r \notin r$
- Då håller $r \in r$ enligt definitionen av r
- Så vi har både $r \in r$ och $r \notin r$
- Tillämpa $\lor$Elim på första premissen och underbevisen för att erhålla $r \in r \land r \notin r$

Zermelo Fraenkels mängdlära

- Dessa motsägelser visar att vare sig r eller V kan existera. Men deras existens följer från abstraktionsaxiomet, och därför måste det vara falskt.
- År 1908 gav Ernst Zermelo ett axiomsystem för mängdlära som inte ger upphov till Cantor eller Russels paradoxer. Detta system vidareutvecklades senare av Abraham Fraenkel, och blev det vanligaste systemet för mängdlära idag: ZFC, för *Zermelo-Fraenkel with Choice*.
- ZFC räcker för att bevisa mer eller mindre allt matematiker vill ha mängdläran till, och ännu har ingen hittat en motsägelse i systemet.

ZFC
Extensionalitet

- ZFC består av totalt 7 axiom och 2 axiomscheman.
- Jag tar dem i tur och ordning:
- *Extensionalitetsaxiomet*
- Samma som i naiv mängdlära, dvs:

$$\forall a \forall b(\forall x(x \in a \equiv x \in b) \rightarrow a = b)$$

ZFZ

Separation (schema)

- Separationsaxiomet säger att för varje formel $P(x)$ med x fri och varje mängd c finns det en mängd d sådan att $x \in d$ omm $x \in c$ och $P(x)$:

$$\forall c \exists d \forall x (x \in d \equiv (x \in c \wedge P(x)))$$

- Separationsaxiomet är ett axiomschema eftersom det finns ett axiom för varje $P(x)$.
- Det är en försvagning av abstraktionsaxiomet eftersom det endast kan konstruera delmängder och tillåter därmed inte mängder av formen:

$$\{x \mid P(x)\}$$

ZFC
Utbyte (schema)

- Utbytesaxiomet säger att för varje tvåställigt predikat P(x, y) som är en total funktion gäller att om P:s domän är en mängd, så är P:s värdemängd också en mängd.

- Alltså om P(x, y) representerar en total funktion f och a en mängd så gäller för varje x att följande mängd existerar:

$$\{y \mid \exists x(x \in a \wedge f(x) = y\}$$

OBS! Utbytessaxiomet är ett axiomschema eftersom det finns ett axiom för varje P(x, y).

ZFC

Kumulativa mängder

- Varken separations eller utbytesaxiomen kan ge mängder som har fler element än det vi började med.
- Detta är anledningen till att vi behöver de flesta av de övriga axiomen: de krävs för att bygga upp mängder ’nedifrån’, dvs från den tomma mängden.
- Detta är en kumulativ idé om mängder. ZFC:s axiom gör så att vi kan bevisa existensen av en enkel mängd (de som existerar på 1a nivån) för att sedan bygga upp alla andra mängder (de som existerar på en nivå högre än 1a) utifrån denna mängd med hjälp av axiomen.

ZFC
Oordnade par

- Axiomet för oordnade par säger att för vilka två objekt som helst finns det en mängd som har båda objekten som element (och ingenting annat):

$$\forall x \forall y \exists c \forall z (z \in c \equiv (z = x \vee z = y))$$

- Det är ett krav i FOL att domänen inte får vara tom och axiomet medför existensen av ovanstående mängd.

ZFC
Union

- Unionsaxiomet säger att för varje mängd c av mängder finns det en mängd som innehåller allt som finns i c:s element (och ingenting annat).

$$\forall c \exists a \forall x (x \in a \equiv \exists b (b \in c \wedge x \in b))$$

- Annorlunda uttryckt säger den att för varje mängd c av mängder så är unionen av alla c:s element också en mängd.
- Detta innebär att vi kan visa för alla mängder c och d att $c \cup d$ existerar.

ZFC

Potensmängd

- Potensmängdsaxiomet säger att för varje mängd c finns $\wp(c)$:

$$\forall c \exists b \forall x (x \in b \equiv x \subseteq c)$$

- Vi måste ha potensmängdsaxiomet som tillägg eftersom vi ur separationsaxiomet inte kan erhålla vilka mängder som helst.
- Potensmängder följde ju ur abstraktionsaxiomet, men eftersom det är falskt och vi vill ha potensmängder så måste detta specificeras i ett separat axiom.

ZFC
Oändlighet

- Oändlighetsaxiomet säger att det finns en mängd a sådan att $\varnothing \in a$ och för varje x, om $x \in a$ så $\{x\} \in a$:

$$\exists a(\varnothing \in a \wedge \forall x(x \in a \rightarrow \{x\} \in a))$$

- Mängden som garanteras av detta axiom har lika många medlemmar som det finns naturliga tal.
- Vi kan tänka på $\varnothing$ som att det representerar 0, $\{\varnothing\}$ som att det representerar 1, $\{\{\varnothing\}\}$ att det representerar 2 …

ZFC
Grundadhet

- Grundadhetsaxiomet säger att varje icke-tom mängd c har något element x sådant att snittet av x och c är den tomma mängden:

$$\forall c (c \neq \varnothing \rightarrow \exists x (x \in c \wedge x \cap c = \varnothing))$$

- Axiomet utesluter existensen av mängder som innehåller sig själv som enda element (kom ihåg Russells paradox).

ZFC
Urval

- Urvalsaxiomet säger att för varje mängd c av icke-tomma mängder finns det en mängd som innehåller exakt ett element från varje element i c.

- Annorlunda uttryckt: låt c vara en icke-tom mängd. Axiomet säger då att det finns en funktion f vars domän är c och som satisfierar följande:

$$\forall x(x \in c \rightarrow f(x) \in x)$$

- Idén är att f 'tittar' på varje mängd i c och plockar ut exakt ett element ur denna mängd.