Formell logik
Kapitel 10

Robin Stenwall
Lunds universitet

Kapitel 10: Kvantifikatorernas logik

- Förra gången introducerade vi kvantifikatorer och variabler
- Vi har därmed infört samtliga symboler i FOL
- Brännande frågor:
  1. Vilka satser med kvantifikatorer är logiska sanningar?
  2. Vilka argument innehållande kvantifikatorer är giltiga?
  3. Vilka bevisregler är giltiga för kvantifikatorer?
  4. Hur kan vi formalisera dessa bevisregler?

Avsnitt 10.1: Tautologier och kvantifiering

- Repetera begreppen: tautologi, tautolog konsekvens och tautolog ekvivalens
- Vi har sett att dessa begrepp är tillämpbara på satser *utan* kvantifikatorer
- Är de även tillämpbara på satser *med* kvantifikatorer?
- Svar: Ja, men de måste tillämpas med försiktighet

- En sats som innehåller kvantifikatorer kan vara en tautologi, dvs. logiskt sann enbart i kraft av meningen hos konnektiven
- Exempel: $\forall x\ Cube(x) \lor \neg \forall x\ Cube(x)$
- Satsen har formen $P \lor \neg P$ och är därför en tautologi

- Allmän princip: Om vi har en tautologi och ersätter dess atomära satser med komplexa satser, så är resultatet fortfarande en tautologi

- Vi kan använda denna metod för att identifiera en stor mängd logiska sanningar som innehåller kvantifikatorer

- Exempel: Betrakta följande tautologi:

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

Ersätt A med $\exists y\, (P(y) \vee R(y))$

Ersätt B med $\forall x\, (P(x) \wedge Q(x))$

Resultat:

$$(\exists y\, (P(y) \vee R(y)) \rightarrow \forall x\, (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\neg \forall x\, (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg \exists y\, (P(y) \vee R(y)))$$

Hade du kunnat se att detta är logiskt sant utan tautologimetodens hjälp?

- Allmän metod för att kontrollera om en sats innehållande kvantifikatorer är en tautologi: se sid. 263 i boken
- Grundidé: Behandla som atomära satser dels de satser som verkligen är atomära, dels alla delsatser som börjar med en kvantifikator
- Resultatet kallas för satsens sanningsfunktionella form (eng. truth-functional form)
- Originalsatsen är en tautologi om dess sanningsfunktionella form är en tautologi

- Övning

- Identifiera den sanningsfunktionella formen hos följande satser:

$\forall x(Cube(x) \rightarrow Small(x))$

$\forall x \neg(Cube(x) \rightarrow Small(x))$

$\exists x Cube(x) \vee \exists x \neg Cube(x)$

$\exists x Cube(x) \vee \neg \exists x Cube(x)$

$\exists x Cube(x) \rightarrow Cube(a)$

$Cube(a) \rightarrow \exists x Cube(x)$

$\exists x Cube(x) \rightarrow (\exists x Cube(x) \vee \exists y Dodec(y))$

$(\exists y Tet(y) \wedge \forall z Small(z)) \rightarrow \forall z Small(z)$

$\neg(Tet(d) \wedge \forall x Small(x)) \rightarrow (\neg Tet(d) \vee \neg \forall y Small(y))$

Avgör huruvida ovanstående är (a) tautologier, (b) logiska sanningar, men inte tautologier eller (c) varken (a) eller (b).

- Betrakta följande argument:

$\exists x(Cube(x) \to Small(x))$

$\underline{\exists x Cube(x)}$

$\exists x Small(x)$

Är slutsatsen en tautologisk konsekvens av premisserna?

Hur är det med följande argument?

$\exists x Cube(x) \to \exists x Small(x)$

$\underline{\exists x Cube(x)}$

$\exists x Small(x)$

- Övning
- Betrakta följande argument. Avgör huruvida argumentet är (a) tautologiskt giltigt, (b) logiskt, men inte tautologiskt giltigt, eller (c) ogiltigt.

$\text{Cube}(a) \wedge \text{Cube}(b)$

$\underline{\text{Small}(a) \wedge \text{Large}(b)}$

$\exists x(\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x)) \wedge \exists x(\text{Cube}(x) \wedge \text{Large}(x))$

$\exists x\text{Cube}(x) \rightarrow \exists x\text{Small}(x)$

$\underline{\neg\exists x\text{Small}(x)}$

$\neg\exists x\text{Cube}(x)$

$\forall x\text{Cube}(x) \rightarrow \exists y\text{Small}(y)$

$\underline{\neg\exists y\text{Small}(y)}$

$\exists x\neg\text{Cube}(x)$

Avsnitt 10.2: Första ordningens giltighet och konsekvens

- Hittills har vi främst bekantat oss med begreppen logisk sanning och konsekvens i termer av tautologier och tautologisk konsekvens.
- Tyvärr kommer vi inte så långt med dessa begrepp inom första ordningens logik.
- Vi behöver även en metod för att avgöra logiska sanningar och giltighet som tar kvantifikatorer och identitet i beaktande.

- Eftersom dessa begrepp är menade att vara applicerbara endast på de logiska sanningar och konsekvenser som beror konnektiven, kvantifikatorerna och identitetssymbolen, så kan vi helt ignorera meningen hos de ingående namnen, funktionssymbolerna och predikaten (förutom identitet).

- Om vi kan identifiera en sats i FOL som en logisk sanning utan att vi vet meningen hos namnen och predikaten (andra än identitet) så säger vi att satsen är FO giltig.

- Betrakta följande:

$\forall x SameSize(x, x)$

$\forall x Cube(x) \rightarrow Cube(b)$

$(Cube(b) \wedge b = c) \rightarrow Cube(c)$

$(Small(b) \wedge SameSize(b, c)) \rightarrow Small(c)$

- Samtliga ovanstående satser är logiska sanningar, men endast de två mittersta är FO giltiga.

- Vi kan se detta genom att ersätta predikaten i vårt block-språk med nonsenspredikat.

$\forall x \mathrm{Bilifjonga}(x, x)$

$\forall x \mathrm{Ulk}(x) \rightarrow \mathrm{Ulk}(b)$

$(\mathrm{Ulk}(b) \wedge b = c) \rightarrow \mathrm{Ulk}(c)$

$(\mathrm{Rulk}(b) \wedge \mathrm{Bilifjonga}(b, c)) \rightarrow \mathrm{Rulk}(c)$

Allmänt gäller att en sats i FOL är FO giltig om det är en logisk sanning då du ignorerar meningen hos namnen, funktionssymbolerna och predikaten (förutom identitet).

- En sats S är en FO konsekvens av premisserna $P_1,\ldots P_n$ om S är en logisk konsekvens ur dessa även då du ignorerar meningen hos namnen, funktionssymbolerna och predikaten (förutom identitet).

- Kom ihåg att alla tautologier är FO giltiga och att alla FO giltiga satser är logiska sanningar. Detsamma gäller för konsekvens.