Formell logik
Kapitel 5 och 6

Robin Stenwall
Lunds universitet

Kapitel 5 Bevismetoder för boolesk logik

- Visa att en sats är en tautologisk konsekvens av en mängd premisser! Lösning: sanningstabellmetoden
- Begränsningar hos sanningstabellmetoden:
  - antalet rader i en sanningstabeller växer exponentiellt med antalet atomära satser: 2^n
  - fungerar endast för argument vars giltighet beror på meningen hos de booleska konnektiven
- Lösning: Härledning/bevis
- Kapitel 5 förklarar de booleska konnektivens logik på ett informellt sätt
- Formella bevisregeler införs i kapitel 6

Avsnitt 5.1: Giltiga bevissteg

- Vad har vi redan?
  - Identitetselimination: från P(n) och n = m får vi härleda P(m)
  - Identitetsintroduktion: vi får alltid införa a = a i ett bevis

  Här är a, n och m godtyckliga termer

- *Konjunktionselimination*:
  - från $P \wedge Q$ får vi härleda P
  - från $P \wedge Q$ får vi härleda Q
- *Konjunktionsintroduktion*:
  - om vi har bevisat P och Q separat får vi härleda $P \wedge Q$
- *Disjunktionsintroduktion*:
  - från P får vi härleda $P \vee Q$
  - från Q får vi härleda $P \vee Q$

Avsnitt 5.2: ”Proof by cases” – argument som betraktar olika fall

- Antag att vi redan vet att $P \vee Q$ är sann och vill visa att S är sann

- Om vi kan visa följande båda om-så-satser så är vi klara:
  - om P är sann, så är S sann (dvs S följer ur P)
  - om Q är sann, så är S sann (dvs S följer ur Q)

- Allmänt: anta att det finns ett antal olika fall och att vi kan visa att oavsett vilket fall som gäller så följer den slutsats vi vill visa. Då har vi visat att slutsatsen följer

Exempel från vardagslivet

Antag att parkeringstiden för din bil har gått ut för några timmar sedan.

Här är ett argument för att du inte behöver rusa tillbaka till bilen.

(1) Antingen har du redan fått parkeringsböter eller så har du inte fått det.

(2) Om du redan har fått parkeringsböter, så är det inget att göra åt. Det är i så fall ingen vits att rusa tillbaka.

(3) Om du inte redan har fått parkeringsböter, så kommer du säkert inte att få böter inom de närmaste fem minuterna heller. Det är i så fall ingen vits att rusa tillbaka.

(4) Alltså: det är ingen vits att rusa tillbaka till bilen.

Är argumentet giltigt? Är det sunt?

- Generellt gäller:

  Givet att vi har redan bevisat en disjunktion $P_1 \vee \ldots \vee P_n$ så kan vi bryta ner beviset av en sats S till n olika fall: P_1 gäller, P_2 gäller, osv.

- Om vi lyckas visa att S är sann oberoende av vilket fall som gäller, då har vi bevisat S

- I korthet: För att bevisa S från $P_1 \vee \ldots \vee P_n$, bevisa S från var och en av $P_1, \ldots ,P_n$

- Denna bevisregel kallas i boken *disjunktionselimination* (varför?)

Avsnitt 5.3: Indirekta bevis (motsägelsebevis)

- En annan utomordentligt användbar bevistyp är motsägelsebevis eller *reductio ad absurdum*
- Den allmänna regeln: för att bevisa $\neg S$, anta S och bevisa en motsägelse
- Denna bevisregel kallas i boken *negationsintroduktion* (varför?)

Exempel från vardagslivet (juridiken)

En försvarsadvokat kan resonera så här:

(1) Anta att min klient är skyldig till bankrånet.

(2) Vi vet att rånet ägde rum kl. 19.

(3) Vi vet också att min klient kl. 18 befann sig i hemmet.

(4) Då måste min klient ha tillryggalagt sträckan mellan hemmet och banken på högst en timme.

(5) Men det motsäger polisens uppgifter att denna färd tar minst två timmar i anspråk.

(6) Alltså är min klient oskyldig.

- En motsägelse (kontradiktion) är någonting som omöjligtvis kan vara sant
- Kontradiktionssymbol: $\perp$ (”falsum”)
- Exempel på motsägelser: $Q \wedge \neg Q$, $\neg(a = a)$, …

- *Tautologiska kontradiktioner*: kontradiktioner vars motsägelsefulla natur beror på meningen hos de booleska konnektiven

- För att visa att en sats är en tautologisk kontradiktion:

  (1) Konstruera en sanningstabell

  (2) Satsen en tautologisk kontradiktion om och endast om det står F överallt i kolumnen under satsens huvudkonnektiv

- Observation: Negationen av en tautologi är en tautologisk kontradiktion

- Övning: Visa att $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ är en tautologisk kontradiktion

Kapitel 6: Formella bevis i boolesk logik

- Det system för härledning som används i boken kallas för *naturlig deduktion*
- Det har två sorters regler för varje konnektiv:
  - introduktionsregler som säger hur vi kan bevisa slutsatser som innehåller konnektivet
  - eliminationsregler som säger hur vi kan dra slutsatser uitfrån premisser som innehåller konnektivet
- Dessa regler finns inbakade i programmet Fitch som följer med kursboken

Avsnitt 6.1: Regler för konjunktion

- Konjunktionselimination ($\wedge$ **Elim**):

$$\left|\begin{array}{l} P_1 \wedge \ldots \wedge P_i \wedge \ldots \wedge P_n \\ \\ P_i \end{array}\right.$$

Här kan P_i vara vilken konjunkt som helst, inklusive den första eller sista

- Konjunktionsintroduktion ($\wedge$ **Intro**):

P_1

$\Downarrow$

P_n

$P_1 \wedge \ldots \wedge P_n$

där pilen indikerar att var och en av $P_1, \ldots, P_n$ måste förekomma i beviset innan konjunktionen av dem kan läggas till

Övning: Visa att $C \wedge B$ följer från $A \wedge B \wedge C$.

Metod: anta $A \wedge B \wedge C$ som premiss och härled $C \wedge B$.

Avsnitt 6.2: Regler för disjunktion

- Disjunktionsintroduktion ($\vee$Intro):

$$P_i$$

$$P_1 \vee \ldots \vee P_i \vee \ldots \vee P_n$$

- Disjunktionselimination ($\vee$ **Elim**):

$P_1 \vee \ldots \vee P_n$

P_1

$\ldots$

S

$\Downarrow$

P_n

$\ldots$

S

S

Övning: Visa att A följer av $(B \wedge A) \vee (A \wedge C)$

- Ytterligare en användbar regel: en premiss får alltid upprepas i ett bevis
- Regeln kallas upprepningsregeln (eng. reiteration rule) och förkortas **Reit**
- Övning: Visa att A följer av $(B \wedge A) \vee A$

Avsnitt 6.3: Regler för negation

- Negationselimination är helt enkelt ”dubbla negationens lag”:
- Negationselimination (¬ **Elim**):

$$\begin{array}{|l} \neg\neg P \\ \\ P \end{array}$$

- Negationsintroduktion (¬**Intro**):

$$
\begin{array}{l|l}
 & \begin{array}{|l} P \\ \hline \ldots \\ \bot \end{array} \\
 & \neg P
\end{array}
$$

- Vi har även regler för att introducera och eliminera ⊥
- ⊥-introduktion (⊥ **Intro**):

$$\begin{array}{|l} P \\ \ldots \\ \neg P \\ \\ \perp \end{array}$$

Övning: Härled ¬¬A från premissen A

- Notera att allting följer av en motsägelse. Om vi har härlett en motsägelse så kan vi sluta oss till vad som helst.
- $\perp$-elimination ($\perp$ **Elim**):

$$\begin{array}{|l} \\ \perp \\ \\ \ldots \\ \\ P \\ \\ \end{array}$$

- Regeln svarar mot följande vardagsresonemang. Kalle har just påstått att han kan göra 100 kilo i bänkpress, varpå Sten tvivlande utbrister ”Om du gör 100 kilo i bänkpress så är månen en grön mögelost”

- Är detta en rimlig härledningsregel?
- Regeln vore orimlig om den gjorde det möjligt att gå från sanna premisser till en falsk slutsats. Gör den det?
- Regeln gör det möjligt att utifrån en motsägelse härleda vad som helst. Men ett sådant bevis saknar övertygelsekraft då det aldrig är sunt.
- Regeln används framför allt i underbevis som ett led i ett större bevis
- Exempel: visa att Q följer av $(P \wedge \neg P) \vee Q$