

# Filosofisk logik

## Kapitel 12 och 13

Robin Stenwall  
Lunds universitet

## Dagens föreläsning

- Informella bevismetoder för kvantifikatorer
  - Universell elimination
  - Existentiell introduktion
  - Existentiell elimination
  - Universell introduktion
  - General Conditional Proof
- Formella bevisregler för kvantifikatorer
  - $\forall$  Elim
  - $\exists$  Intro
  - $\exists$  Elim
  - $\forall$  Intro

## Bevisföring med kvantifikatorer

- Vi har lärt oss vad kvantifikatorerna betyder.
- Nu skall vi lära oss hur kvantifierade satser används i bevis.
- Mer specifikt så kommer vi att lära oss bevismetoder som är tillräckliga för att bevisa samtliga konsekvenser som beror på meningen hos konnektiven, identitet och kvantifikatorerna.

## Universell elimination

- Antag att följande generalisering är sann  
(1) Alla har en vän
- Tag sedan en godtycklig person ur vår domän: Tarski
- Givet att (1) är sann, så kan vi sluta oss till:  
(2) Tarski har en vän
- Varför?
- (2) är en logisk konsekvens av (1).

## Universell elimination

- Att (2) är en logisk konsekvens av (1) är bara ett exempel på en mer generell princip:
- **Principen:** Om någonting gäller för alla individer, så gäller det speciellt för en viss individ.

Dvs:

Från  $\forall xS(x)$

kan vi härleda  $S(c)$

förutsatt att  $c$  betecknar en individ i domänen

# Universell elimination

## Ett exempel

- Antag att följande är sant:

$$(3) \forall x(\text{Cube}(x) \vee \text{Small}(x))$$

samt även att a och b betecknar individer i domänen

- Med hjälp av universell elimination kan då du sluta dig till:

$$(4) \text{Cube}(a) \vee \text{Small}(a)$$

$$(5) \text{Cube}(b) \vee \text{Small}(b)$$

## Existentiell introduktion

- En av de enklaste introduktionsreglerna
- Från
  - (6) Tarski hälsade på Gödelkan vi sluta oss till
  - (7) Någon hälsade på Gödel
  - (8) Tarski hälsade på någon
- Från
  - (9) Alla logiker älskar Tarskikan vi sluta oss till
  - (10) Alla logiker älskar någon

## Existentiell introduktion

- **Principen:** Om någonting gäller för en viss individ  $c$ , så finns det en individ för vilket det gäller.

Dvs:

Från  $S(c)$

kan vi härleda  $\exists x S(x)$

förutsatt att  $c$  betecknar en individ i domänen.



# Existentiell introduktion

## Ett exempel

- Antag att följande är sant:

$$(11) \text{Tet}(a) \vee \neg \text{SameSize}(a, c)$$

- Med hjälp av existentiell introduktion kan du då sluta dig till följande:

$$(12) \exists x(\text{Tet}(x) \vee \neg \text{SameSize}(x, c))$$

# Existentiell introduktion

## Ett potentiellt problem

- Antag att följande är sant:  
(13) Fantomen finns inte
- Följer det ur (13) att:  
(14) Det finns minst ett  $x$  sådant att  $x$  inte existerar?
- Nej! Fantomen betecknar inte ett objekt i vår domän.

# Existentiell introduktion

## Ett mer komplext exempel

- Betrakta följande argument:

$$P_1: \forall x(\text{Tet}(x) \rightarrow \text{Small}(x))$$

$$\underline{P_2: \text{Tet}(a)}$$

$$S: \exists x(\text{Tet}(x) \wedge \text{Small}(x))$$

- Med hjälp av universell elimination erhåller vi  $\text{Tet}(a) \rightarrow \text{Small}(a)$  ur  $P_1$ .
- Från  $\text{Tet}(a) \rightarrow \text{Small}(a)$  och  $P_2$  erhåller vi  $\text{Small}(a)$
- Så vi har  $\text{Tet}(a) \wedge \text{Small}(a)$
- Genom existentiell introduktion får vi  $\exists x(\text{Tet}(x) \wedge \text{Small}(x))$

# Existentiell introduktion

## Övning

- Ge ett informellt bevis för följande:

$P_1: \forall x(\text{Tet}(x) \vee \text{Small}(x))$

$P_2: \neg \text{Tet}(a)$

$S: \exists x \text{Small}(x)$

Vilka regler används?

- Utöver universell elimination och existentiell introduktion så finns det även mer komplexa bevisföringsmetoder som involverar kvantifikatorer.
- Vi kommer att titta närmare på tre av dem:
  - Existentiell elimination
  - Universell introduktion
  - General Conditional Proof

## Existentiell elimination

- Antag att du har en existentiell premiss och vill visa att någonting följer ur den
  - (14) Någonting är en liten kub
- Antag att domänen endast innehåller två ting, a och b
  - Kan du sluta dig till att a är en liten kub?
  - Kan du sluta dig till att b är en liten kub?
- Här är en idé.
  - Vi kan från (14) sluta oss till att det finns någon figur, kalla den Blub, som är en liten kub.
- Sen kan vi 'låtsas' som om Blub var ett riktigt namn och se vad som följer ur det antagandet.

## Existentiell elimination

- Varför är detta en bra idé?
- Ja, en existentiell sats av typen:

$$\exists x(F(x) \wedge G(x))$$

- kan trots allt förstås som en disjunktion av typen:

$$(Fa \ \& \ Ga) \vee (Fb \ \& \ Gb) \vee (Fc \ \& \ Gc) \dots$$

- Och om disjunktionen är sann så vet vi att det måste finnas minst en sann disjunkt med formen:

$$F\_ \ \& \ G\_$$

- Här är det av ingen betydelse huruvida du har kännedom om objektet som både är F och G. Så länge du vet att *någon*ting är F och G och du kan konstruera en giltig deduktion som går från ett påstående som designerar detta *någon*ting (vad det än må vara '\_') till en slutsats, så har du lyckats visa slutsatsen från premissen att *någon*ting är F och G.

# Existentiell elimination

## Ett exempel

- Betrakta följande argument:  
     $P_1: \forall x(Tet(x) \rightarrow Small(x))$   
     $P_2: \exists xTet(x)$   
     $S: \exists xSmall(x)$
- Vi måste använda oss av  $P_2$ , så låt oss testa att införa ett låtsasnamn.
- Från  $P_2$  vet vi att det finns någon figur, kalla det  $d$  (detta motsvarar  $\_$ ), sådant att  $Tet(d)$ .
- Med hjälp av universell elimination erhåller vi  $Tet(d) \rightarrow Small(d)$  från  $P_1$ .
- Vi erhåller sedan  $Small(d)$  genom modus ponens.
- Med hjälp av existentiell introduktion får vi  $S$ .



# Existentiell elimination

## En observation

- I exemplet ovan introducerade vi ett låtsasnamn och sedan använde vi oss av universell elimination.
- Kan vi göra det omvända?
- Antag att vi med hjälp av universell elimination först erhåller  $\text{Tet}(d) \rightarrow \text{Small}(d)$  från  $P_1$ .
- Kan vi nu introducera ett låtsasnamn: ex. låt  $d$  vara vad som än är en tetraeder enligt  $P_2$ ?
- Nej, själva poängen med låtsasnamn är att introducera ett *helt nytt namn*. Men i detta fall används  $d$  redan.
- Använd er alltid av universell elimination efter det att ni har introducerat ett låtsasnamn.

## Existentiell elimination

- **Principen:** Om det finns en individ för vilken någonting gäller, så kan vi införa ett nytt namn för att beteckna den individen med och sluta oss till att den individ som namnet står för har egenskapen ifråga.

Dvs:

Från

$\exists xS(x)$

kan vi sluta oss till

$S(c)$

förutsatt att c är ett nytt namn som inte redan betecknar en individ.

# Existentiell elimination

## Ett annat exempel

- Betrakta följande argument:

$P_1: \forall y(\text{Cube}(y) \vee \text{Dodec}(y))$

$P_2: \forall x(\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Large}(x))$

$P_3: \exists x \neg \text{Large}(x)$

$S: \exists x \text{Dodec}(x)$

**Informellt bevis:** Givet  $P_3$  kan vi genom existentiell elimination anta att  $\neg \text{Large}(b)$ . Ur  $P_2$  med hjälp av universell elimination följer det att  $\text{Cube}(b) \rightarrow \text{Large}(b)$ . Alltså måste  $\neg \text{Cube}(b)$ . Men från  $P_1$  följer det att  $\text{Cube}(b) \vee \text{Dodec}(b)$ . Alltså  $\text{Dodec}(b)$ . Ur detta följer det med hjälp av existentiell introduktion att  $\exists x \text{Dodec}(x)$ .

# Existentiell elimination

## Övning

- Ge ett informellt bevis för följande argument:

$P_1: \forall x(\text{Tet}(x) \vee \neg \text{Small}(x))$

$P_2: \forall y(\text{Tet}(y) \rightarrow \text{LeftOf}(a, y))$

$P_3: \exists x \text{Small}(x)$

$S: \exists x \text{LeftOf}(a, x)$

## Universell introduktion

- Betrakta följande argument:

P<sub>1</sub>: Alla som grubblar är olyckliga

P<sub>2</sub>: Alla filosofistudenter grubblar

S: Alla filosofistudenter är olyckliga

**Informellt bevis:** Låt 'Quine' denotera någon (vilken som helst) av filosofistudenterna. Givet andra premissen, grubblar Quine (universell elimination). Enligt P<sub>1</sub>, så måste Quine vara olycklig. Men eftersom Quine valdes ut arbiträrt, så följer det att alla filosofistudenter är olyckliga.

## Universell introduktion

- Notera att vi inte valde ut en specifik filosofistudent
- Vår bevisföring var helt generell: den fungerar oberoende av vilken mängd entiteter den appliceras på
- Denna generalitet uppstod genom att vi introducerade ett nytt namn för att tala om ett arbiträrt objekt
- Då objektet var arbiträrt och någonting gäller för det objektet så är vi rättfärdigade att dra en slutsats om samtliga objekt.

## Universell introduktion

- **Principen:** Om någonting gäller för en arbiträr individ så gäller det för alla individer.

Dvs:

Från

$S(c)$

kan vi sluta oss till

$\forall xS(x)$

förutsatt att  $c$  är ett nytt namn som står för en godtycklig individ.

# Universell introduktion

## Ett exempel

- Betrakta följande argument:

$$P_1: \forall x \text{Tet}(x)$$

$$P_2: \underline{\forall x \text{Medium}(x)}$$

$$S: \forall x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Medium}(x))$$

- Låt 'c' denotera en godtyckligt objekt i Tarski's World
- Genom universell elimination på  $P_1$  och  $P_2$ , så erhåller vi  $\text{Tet}(c)$  och  $\text{Medium}(c)$ .
- Så vi har  $\text{Tet}(c) \wedge \text{Medium}(c)$
- Men eftersom  $c$  var godtycklig så följer  $S$ .



## General Conditional Proof

- I praktiken är vi dock främst intresserade av att bevisa generella påståenden av följande form:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

- För att bevisa detta genom universell introduktion så måste du bevisa följande för ett arbiträrt  $c$ :

$$P(c) \rightarrow Q(c)$$

- Detta kan genomföras lättare genom att använda GCP.
  - Antag  $P(c)$  och visa att  $Q(c)$  följer

## General Conditional Proof

- **Principen:** Antag att vi vill visa att alla saker av en viss typ har en viss egenskap. Det kan vi göra genom att låta 'c' denotera ett arbiträrt objekt av den typen och visa att c har egenskapen i fråga.

Dvs:

Om vi antar  $P(c)$

och lyckas visa  $Q(c)$

så kan vi sluta oss till  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

förutsatt att c är ett nytt namn som står för en godtycklig individ.

# General Conditional Proof

## Några noteringar

- **Anmärkning 1:** GCP är en väldigt naturlig bevisregel men behövs egentligen inte givet att vi redan har introduktionsreglerna för  $\rightarrow$  och  $\forall$ .
- I boken ses introduktionsregeln för  $\forall$  som ett specialfall av GCP.
- **Anmärkning 2:** Om du vill visa  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  så kan du välja ett nytt namn 'c', anta  $P(c)$  och sedan visa  $Q(c)$ , under förutsättningen att  $Q(c)$  inte innehåller några namn som introducerades genom existentiell elimination efter antagandet  $P(c)$ .
  - Utan denna restriktion kan vi härleda falska slutsatser från sanna premisser (se boken 12.4)

# General Conditional Proof

## Ett exempel

- Betrakta följande argument:

$P_1: \forall x(\text{Small}(x) \rightarrow \neg \text{Tet}(x))$

$P_2: \underline{\forall x(\neg \text{Tet}(x) \rightarrow \text{Cube}(x))}$

$S: \forall x(\text{Small}(x) \rightarrow \text{Cube}(x))$

- Låt 'a' beteckna ett arbiträrt objekt i TW
- Antag  $\text{Small}(a)$  (Mål: visa att  $\text{Cube}(a)$ )
- Från  $P_1$  följer  $\text{Small}(a) \rightarrow \neg \text{Tet}(a)$
- Genom modus ponens följer  $\neg \text{Tet}(a)$
- $P_2$  ger oss  $\neg \text{Tet}(a) \rightarrow \text{Cube}(a)$  och därmed  $\text{Cube}(a)$
- Då a var godtycklig följer S.

## $\forall$ Elim

- Ok, nu är det dags att lära sig de formella bevisreglerna för kvantifikatorer. Vi börjar med en lätt:

$\forall x S(x)$

Exempel

1.  $\forall x (Tet(x) \wedge Small(x))$       •
2.  $Tet(c) \wedge Small(c)$        $\forall$ Elim 1

•

•

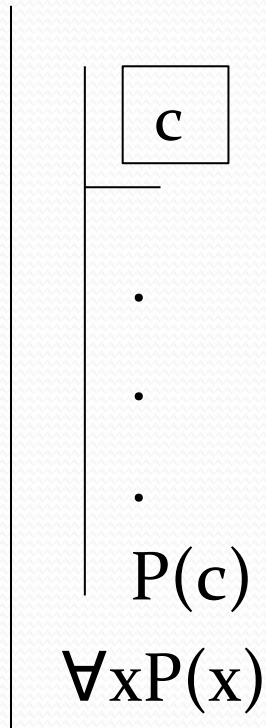
$S(c)$

## $\forall$ Intro

- Det finns två informella metoder för att bevisa ett generellt påstående
  - Universell introduktion
  - General Conditional Proof
- Vi kommer att titta på två versioner av  $\forall$  Intro, en för varje informell metod.

# ∀ Intro

## Version 1

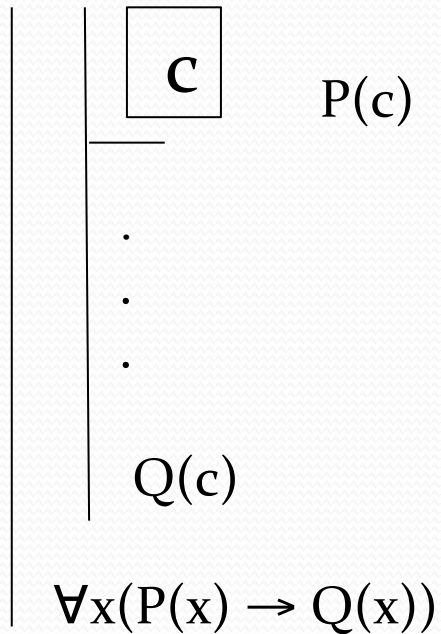


$c$  får inte figurera utanför det underbevis där det introducerades, då  $c$  måste vara arbiträr.

Lådan med  $c$  läses som *låt  $c$  vara ett arbiträrt objekt i domänen.*

# ∀ Intro

## Version 2



där  $c$  inte  
förekommer  
utanför det  
underbevis där  $c$   
introducerades



## $\exists$ Intro

$S(c)$

·

·

·

$\exists xS(x)$

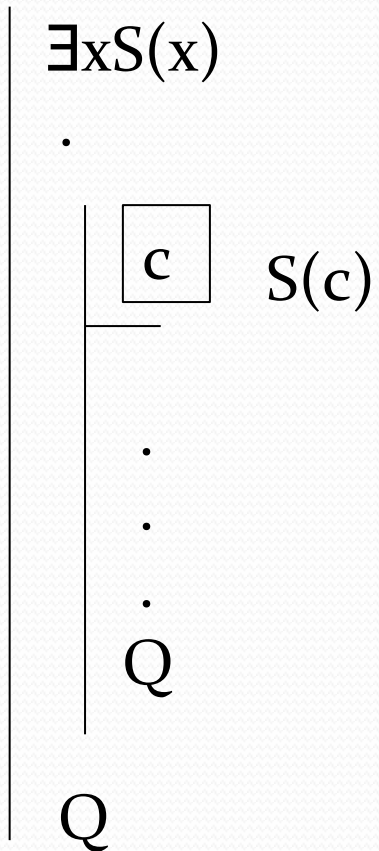
Exempel

1.  $Tet(c)$

2.  $\exists xTet(x)$

$\exists$  Elim 1

## $\exists$ Elim



Där  $c$  inte  
förekommer  
utanför det  
underbevis där det  
introducerades

## Övningar

- Gör följande härledningar i F:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\underline{\forall z(Q(z) \rightarrow R(z))}$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow R(x))$$

$$\forall x(C(x) \rightarrow L(x))$$

$$\forall x(L(x) \rightarrow R(x, b))$$

$$\underline{\exists xC(x)}$$

$$\exists x(L(x) \wedge R(x, b))$$

## Övningar forts.

$$\exists x(T(x) \wedge S(x))$$

$$\underline{\forall x(S(x) \rightarrow R(x, b))}$$

$$\exists xR(x, b)$$

$$\underline{\forall x\neg P(x)}$$

$$\neg\exists xP(x)$$

$$\underline{\neg\forall xP(x)}$$

$$\exists x\neg P(x)$$

## Övningar forts.

$\exists y \forall x R(x, y)$       (går det att hitta ett bevis för det  
 $\forall x \exists y R(x, y)$       omvända?)

$\exists y (G(y) \wedge \forall x (B(x) \rightarrow L(x, y)))$   
 $\forall x (B(x) \rightarrow \exists y (G(y) \wedge L(x, y)))$