

# Filosofisk logik

## Kapitel 10 och 11 (forts.)

Robin Stenwall  
Lunds universitet

# Viktigt att tänka på

- Innehållet i kursen formell logik förutsätts vara inhämtat (repetera om du är osäker).
- I allmänhet gäller att kursinnehållet, som ska instuderas på relativt kort tid, är till karaktären abstrakt och kräver mognad och tid för att absorberas.
- Det är därför viktigt att:
  - Läsa kursinnehållet
  - Delta i undervisningen
  - Förbereda sig inför varje föreläsning

# Kurslitteraturen

- I princip fortsätter vi där vi slutade i LPL.
- Följande avsnitt ur LPL ingår i kursen:
  - Kapitel 10: 10.3-10.4 (21/11)
  - Kapitel 11: 11.7 (21/11)
  - Kapitel 12: 12.1-12.4 (22/11)
  - Kapitel 13 (22/11)
  - Kapitel 14: 14.1-14.3 (23/11)
  - Kapitel 15 (27/11: 15.1-15.8), (28/11: 15.9-15.10)
  - Kapitel 18: 18.1-18.3 (30/11)
  - Kapitel 19: 19.1-19.8 (1/12)
  - Mer kan komma att ingå beroende på hur långt vi kommer.

# Om kursen

- (A) *Predikatlogik (forts.)* Vi kommer diskutera prenex normalform, numerisk kvantifikation och kvantifikatorernas logik.
- (B) *Mängdläran* är nödvändig för att förstå vissa metalogiska resultat, men är även användbart för en filosof. Den utgör dessutom ett bra exempel på en formell teori som faktiskt används. Vi kommer att diskutera praktiskt tillämpbar mängdlära och några filosofisk-logiska resultat, såsom Russells paradox.
- (C) *Metalogik* handlar om formella egenskaper hos logiska system såsom sundhet och fullständighet, samt om viktiga logiska och semantiska begrepp (t.ex. sanning och modell), samt om tolkningar av logiska system. Vi kommer framförallt ge en översikt över detta område såsom det är tillämpbart på FOL.

# Betygskriterier

Mål	Godkänt	Väl godkänt
Redogöra för samtida teoretisk-filosofisk teoribildning inom mängdlära och metalogik.	Studenten kan adekvat redogöra för samtida teoretisk-filosofisk teoribildning inom mängdlära (ex. ZFC) och metalogik (ex. Gödels fullständighetsteorem).	Studenten kan på ett problematiserande sätt redogöra för samtida teoretisk-filosofisk teoribildning inom mängdlära och metalogik.
Redogöra för grundprinciperna för härledning och översättning i predikatlogik med kvantifikatorer.	Studenten kan på ett grundläggande och korrekt sätt redogöra för grundprinciperna för härledning och översättning i predikatlogik med kvantifikatorer.	Studenten kan på ett detaljerat sätt redogöra för grundprinciperna för härledning och översättning i predikatlogik med kvantifikatorer.
Utföra översättningar och härledningar i predikatlogik med kvantifikatorer.	Studenten kan på ett tillfredställande sätt utföra översättningar och härledningar i predikatlogik med kvantifikatorer.	Studenten kan på ett ändamålsenligt sätt utföra översättningar och härledningar i predikatlogik med kvantifikatorer.
Identifiera samt ta ställning till vilken roll logiska grundantaganden spelar för hur enskilda teorier eller argument skall värderas.	Studenten har förstått och kan redogöra för vilken roll logiska grundantaganden spelar för hur enskilda teorier eller argument skall värderas.	Studenten kan föra en fördjupande och problematiserande diskussion om vilken roll logiska grundantaganden spelar för hur enskilda teorier eller argument skall värderas.

## Avsnitt 10.3 Några nyttiga ekvivalenser

- Två sätt att använda tautologa ekvivalenser i första-ordningens logik

(1) Satser vars sanningsfunktionella former är tautologt ekvivalenta är FO-ekvivalenta.

Exempel: Följande satser är FO-ekvivalenta

$$\neg(\exists x \text{ Cube}(x) \wedge \forall y \text{ Dodec}(y))$$

$$\neg\exists x \text{ Cube}(x) \vee \neg\forall y \text{ Dodec}(y)$$

(2) Men vi kan även använda DeMorgans lagar och andra tautologa ekvivalenser inuti formler.

Exempel: Följande satser är alla FO-ekvivalenta:

$$\forall x(\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Small}(x))$$

$$\forall x(\neg \text{Small}(x) \rightarrow \neg \text{Cube}(x))$$

$$\forall x(\neg \text{Cube}(x) \vee \text{Small}(x))$$

Notera att de wffs som binds av kvantifikatorerna kommer att satisfieras av exakt samma objekt i varje möjlig situation.

## Avsnitt 11.7 Prenex normalform

- Det är ibland bekvämare att hantera formler där samtliga kvantifikatorer har flyttats till början av uttrycket. Dessa typer av formler sägs vara i prenex normalform.
- Definition: En formel är i prenex normalform om den antingen saknar kvantifikatorer eller samtliga kvantifikatorer står i början av formeln, dvs om den har följande form:

$$K_1 x_1 K_2 x_2, \dots K_n x_n B$$

där  $K_i (i = 1, \dots, n)$  är antingen  $\forall$  eller  $\exists$  och formeln  $B$  är fri från kvantifikatorer.

OBS! En formel utan kvantifikatorer betraktas som ett trivialt fall av en formel i prenex normalform.

- Övning: vilka av följande uttryck står i prenex normalform?

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

$$\forall x \forall y (\neg P(x) \rightarrow Q(y))$$

$$\forall x \exists y R(x, y)$$

$$R(x, y)$$

$$\neg \forall x R(x, y)$$

## En algoritm för prenex normalform

- Alla satser är logiskt ekvivalenta med någon sats i prenex normalform. För att omvandla en sats (vilken som helst) till prenex normalform använder vi oss av följande steg (arbeta inifrån ut):
  - 1. Eliminera samtliga förekomster av  $\rightarrow$  och  $\leftrightarrow$  från formeln ifråga.
  - 2. Flytta alla negationstecken inåt i formeln så att de bara figurerar i literaler (alltså formler som antingen är atomära eller negerade atomära formler).
  - 3. Om nödvändigt skriv om formeln så att inte två kvantifikatorer binder samma variabler och så att ingen variabel har både fria och bundna förekomster.
  - 4. Vi erhåller nu en formel i prenex normalform genom att flytta samtliga kvantifikatorer till början av formeln.

## Steg 1.

- Använd er av följande ekvivalenser när ni eliminerar förekomsterna av  $\rightarrow$  och  $\leftrightarrow$ :

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

## Steg 2.

- Använd er av följande ekvivalenser när ni flyttar negations-tecken inåt i en formel:
- DeMorgans lagar
  - $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
  - $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
  - $\neg\neg P \Leftrightarrow P$
- DeMorgans lagar för kvantifikatorer
  - $\neg\forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x)$
  - $\neg\exists xP(x) \Leftrightarrow \forall x\neg P(x)$

## Övningar

- Flytta negationstecknet inåt (så långt det går) i följande formler:

$$\neg \exists x(P(x) \wedge Q(x))$$

$$\neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

### Steg 3.

- Använd er av följande resultat när ni standardiserar isär variablerna:
  - För vilken wff  $P(x)$  som helst och variabel  $y$  sådan att  $y$  inte figurerar i  $P(x)$  gäller följande:
    - $\forall xP(x) \Leftrightarrow \forall yP(y)$
    - $\exists xP(x) \Leftrightarrow \exists yP(y)$

- Övning: standardisera isär variablerna i följande formel:

- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists xQ(x) \wedge \exists zP(z)$

- Lösning: Ersätt  $x$  med  $y$  i  $\exists xQ(x)$  för att erhålla:

- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists yQ(y) \wedge \exists zP(z)$

## Steg 4.

- Använd er av följande ekvivalenser när ni flyttar kvantifikatorerna till början av formeln:
  - För varje FO-formel  $P$  i vilken  $x$  inte är fri gäller:
    - $\forall x P \Leftrightarrow P$
    - $\exists x P \Leftrightarrow P$
    - $P \wedge \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x (P \wedge Q(x))$
    - $P \wedge \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x (P \wedge Q(x))$
    - $P \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x (P \vee Q(x))$
    - $P \vee \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x (P \vee Q(x))$

## Kvantifiering på tomgång (eng. *null quantification*)

- När vi definierade wffs så krävde vi inte att den variabel som vi kvantifierade över är fri (eller förekommer överhuvudtaget) i den formel som kvantifikatorn appliceras på.
- Exempelvis är  $\forall x \text{Cube}(b)$  en wff även om  $\text{Cube}(b)$  inte innehåller den fria variabeln  $x$ .
- Betrakta då  $\forall x \text{Cube}(b)$ . Denna sats kommer ut som sann i en värld om och endast om alla objekt inom domänen satisfierar formeln  $\text{Cube}(b)$ . Men vad betyder detta?
- Om du ersätter varje förekomst av  $x$  i  $\text{Cube}(b)$  med namnet  $n_1$ , så kommer resultatet att vara  $\text{Cube}(b)$ . Så frågan om något objekt satisfierar  $\text{Cube}(b)$  är samma sak som att fråga om  $\text{Cube}(b)$  är sann. Därmed kommer  $\forall x \text{Cube}(b)$  och  $\text{Cube}(b)$  att vara sanna i exakt samma världar—de är m.a.o. logiskt ekvivalenta.

## Några andra nyttiga ekvivalenser i steg 4.

- $\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$
- $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$ 
  - OBS!  $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$  är inte logiskt ekvivalent med  $\forall x(P(x) \vee Q(x))$  och  $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$  är inte ekvivalent med  $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ .
- $\forall x\forall yP(x, y) \Leftrightarrow \forall y\forall xP(x, y)$
- $\exists x\exists yP(x, y) \Leftrightarrow \exists y\exists xP(x, y)$
- $K_1xP(x) \wedge K_2yQ(y) \Leftrightarrow K_1xK_2y(P(x) \wedge Q(y))$
- $K_1xP(x) \vee K_2yQ(y) \Leftrightarrow K_1xK_2y(P(x) \vee Q(y))$ , där  $K_1$  och  $K_2$  är antingen  $\forall$  eller  $\exists$ .

Exempelvis om  $K_1 = \forall$  och  $K_2 = \exists$ , så är  $\forall xP(x) \wedge \exists yQ(y) \Leftrightarrow \forall x\exists y(P(x) \wedge Q(y))$ .

## Ett exempel

- Hitta prenex normalformen för:
  - $\forall x((\exists yR(x, y) \wedge \forall y\neg S(x, y)) \rightarrow \neg(\exists yR(x, y) \wedge P))$
  - Enligt steg 1. måste vi eliminera  $\rightarrow$
  - $\forall x(\neg(\exists yR(x, y) \wedge \forall y\neg S(x, y)) \vee \neg(\exists yR(x, y) \wedge P))$
  - Enligt steg 2. måste vi flytta negationstecknet inåt
  - $\forall x(\neg\exists yR(x, y) \vee \neg\forall y\neg S(x, y) \vee \neg\exists yR(x, y) \vee \neg P)$
  - $\forall x(\forall y\neg R(x, y) \vee \exists yS(x, y) \vee \forall y\neg R(x, y) \vee \neg P)$
  - I steg 3. standardiserar vi isär variablerna
  - $\forall x(\forall y\neg R(x, y) \vee \exists y_1S(x, y_1) \vee \forall y_2\neg R(x, y_2) \vee \neg P)$
  - I steg 4. flyttar vi samtliga kvantifikatorer till början av formeln:
  - $\forall x\forall y\exists y_1\forall y_2(\neg R(x, y) \vee S(x, y_1) \vee \neg R(x, y_2) \vee \neg P)$

## Övningar

- Ändra följande satser till prenex normalform:
- $\exists xP(x) \rightarrow \exists yQ(y)$
- $\forall x(F(x) \rightarrow (\exists yR(y, x) \wedge \exists yR(x, y)))$
- $(\exists xP(x) \vee R(b)) \rightarrow \forall x(P(x) \wedge \forall xQ(x))$
- $\forall x((P(x) \wedge \exists y(Q(y) \wedge R(x, y))) \rightarrow \exists y(D(y) \wedge L(x, y)))$
- $\exists z(\exists xQ(x, z) \vee \exists xP(x)) \rightarrow \neg(\neg\exists xP(x) \wedge \forall x\exists zQ(z, x))$

*Kom ihåg att varje steg i serien måste vara logiskt ekvivalent med den föregående.*