

Logik Grundkurs – övningar 3

Lärare: Carlo Proietti

1. Behandla följande FOL symboler.

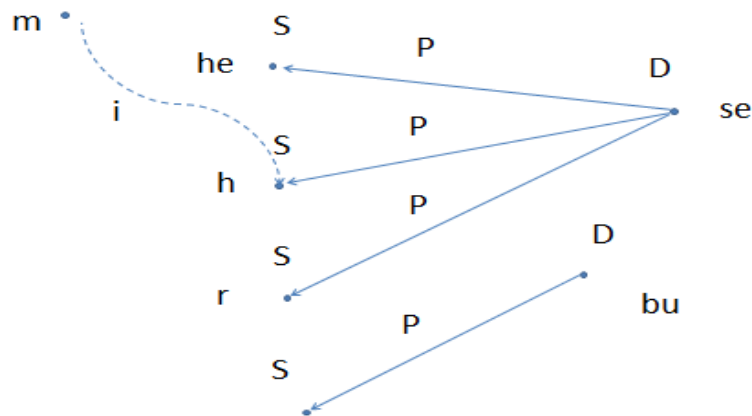
Konstantsymboler: $h := \text{Harry}$; $r := \text{Ron}$; $he := \text{Hermione}$; $s := \text{Severus}$, $bu := \text{Burbage}$,
 $m := \text{osynlighetsmanteln}$

Funktionssymboler: $i(x) := \text{innehavaren av } x$

Predikatsymboler: $S(x)$: x är en student (på Hogwarts); $D(x)$: x är Docent.

Relationssymboler(2-ställiga) := $P(x,y)$:= x är y 's lärare

Betrakta nu följande *tolkning* (se nedanstående figur). En punkt föreställer en individ. Varje konstantsymbol är knuten till en individ (is interpreted with an individual), varje predikatsymbol till en mängd av individer och varje relationssymbol till en mängd av par av individer. Avgör sedan huruvida satserna nedan är sanna eller falska.



- i) $\exists x S(x)$
- ii) $\forall y \exists x S(x)$ [noll kvantifikation]
- iii) $\forall x S(x)$
- iv) $\exists x S(x) \wedge \exists x D(x)$
- v) $\exists x (S(x) \wedge D(x))$
- vi) $\forall x S(x) \vee \forall x D(x)$
- vii) $\forall x (S(x) \vee D(x))$
- viii) $\forall x S(x) \vee D(se)$
- ix) $\forall x (S(x) \vee D(se))$
- x) $\forall x \exists y (S(x) \rightarrow P(y, x))$
- xi) $\exists y \forall x (S(x) \rightarrow P(y, x))$
- xii) $\forall x \exists y (S(y) \rightarrow P(x, y))$ [variabel utbyte]
- xiii) $\exists y \forall x (S(y) \rightarrow P(x, y))$
- xiv) $\exists x (S(x) \wedge \exists y P(y, x))$
- xv) $\exists x \exists y (S(x) \wedge P(y, x))$
- xvi) $\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow x=y))$

- xvii) $\exists x \exists y (\neg(x=y) \wedge P(x) \wedge P(y))$
- xviii) $\exists x \exists y \exists z (\neg(x=y) \wedge \neg(y=z) \wedge \neg(x=z) \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge P(z))$
- xix) $\exists x \exists y \exists z (\neg(x=y) \wedge \neg(y=z) \wedge P(x) \wedge P(y) \wedge P(z))$
- xx) $\exists x (P(x, i(m)) \wedge \exists y (P(x, y) \wedge \neg(y=m)))$

Viktig intermezzo

Vi behöver expandera vårt begrepp av ekvivalens för att innefatta well formed formulas, t.ex

$$\neg C(x) \vee S(x) \Leftrightarrow C(x) \rightarrow S(x)$$

Metod: Godtyckligt utbyte. Om vi introducera ett nytt namn "n" för ett godtyckligt objekt så kan vi visa att följande är en ekvivalens mellan satser

$$\neg C(n) \vee S(n) \Leftrightarrow C(n) \rightarrow S(n)$$

Lärdom: två wffs är FOL-ekvivalenta om vi, genom att ersätta deras fria variabel med nya namn, får två FOL-ekvivalenta satser ("if in any possible circumstance the resulting sentences are satisfied by the same objects").

Vi kan visa (men fortfarande inte bevisa) att

$$\text{Om } P \Leftrightarrow Q \text{ så } R(P) \Leftrightarrow R(Q)$$

t.ex $\forall x (\neg C(x) \vee S(x)) \Leftrightarrow \neg C(n) \vee S(n)$ för n godtycklig $\Leftrightarrow C(n) \rightarrow S(n)$ för n godtycklig $\Leftrightarrow \forall x (C(x) \rightarrow S(x))$

2. Använd FOL-ekvivalenslagar (se kursmaterial) för att förvandla följande satser till *prenex form* (sect 11.7 boken)

- i) $\forall x P(x) \vee \forall y (R(y) \wedge Q(y))$
- ii) $\forall x P(x) \vee \forall x (R(x) \wedge Q(x))$
- iii) $\forall x P(x) \vee \forall y (R(y) \wedge \exists x Q(x))$
- iv) $\forall x P(x) \rightarrow \forall y (R(y) \wedge \exists x Q(x))$

3. Översätt satserna nedan till FOL medelst följande symboler:

- (i) Alla flitiga studenter har en krävande lärare
- (ii) Några flitiga studenter har ingen krävande lärare
- (iii) Några flitiga studenter har endast krävande lärare
- (iv) Ingen flitig student har endast krävande lärare

(v) Om någon är klasskamrat till Harry, är han också till Ron [Donkey sentence]

4. Härled med hjälp av *Fitch*

- (i) $P(a)$ från $\forall x P(x)$
- (ii) $\forall x P(x)$ från $P(a)$
- (iii) $P(a)$ från $\exists x P(x)$
- (iv) $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ från $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$
- (v) $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ från $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- (vi) $\exists x (P(x) \vee Q(x))$ från $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
- (vii) $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$ från $\exists x (P(x) \vee Q(x))$
- (viii) $\forall x (P(x) \vee Q(x))$ från $P(a) \vee \forall x Q(x)$
- (ix) $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$ från $P(a) \wedge \exists x Q(x)$
- (x) $\exists x \neg S(x)$ från $\forall x (C(x) \leftrightarrow (S(x) \wedge M(x)))$ och $\exists x \neg C(x)$
- (xi) $\neg \exists x S(x)$ från $\forall x \neg P(x)$
- (xii) $\exists x C(x)$ från $\forall x \exists y (P(x) \rightarrow C(y))$ och $\exists x P(x)$

5. Översätt satserna nedan till FOL medelst följande symboler

Konstantsymboler: h := Harry ; r := Ron ; he := Hermione ; s := Severus, m := den osynlighetsmantel

Funktionssymboler: $i(x)$:= innehavaren av x

Predikatsymboler: $S(x)$: x är en student (på Hogwarts); $K(x)$: x är krävande; $F(x)$: x är flitig

Relationssymboler(2-ställiga) $=$:= identitet; $L(x,y)$:= x är y s lärare ; $C(x,y)$:= x är klasskamrat med y ; $T(x,y)$:= x tycker om y ;

(i) Alla studenter har en krävande lärare

(ii) Några flitiga studenter har ingen krävande lärare

(iii) Några flitiga studenter har endast krävande lärare

(iv) Ingen flitig student har endast krävande lärare

(v) Om någon är klasskamrat till Harry, är han/hon också klasskamrat till Ron

(vi) Harry är den enda innehavaren av osynlighetsmanteln

(vii) Hermione har minst två klasskamrater

(viii) Hermione har högst fyra klasskamrater

(ix) Några klasskamrater till Ron tycker inte om varandra

(x) Alla klasskamrater tycker om varandra

[$C(x,y)$ är symmetrisk: $C(x,y) \rightarrow C(y,x)$]

(xi) Minst två klasskamrater tycker om sin lärare