

Filosofisk Logik

(FTEA21:4)

föreläsningsanteckningar

I

v. 2.0, den 24/4 2013

Staffan Angere
Filosofiska institutionen, Lunds Universitet
staffan.angere@fil.lu.se

~

Förberedande

Om detta kompendium:

Det här kompendiet är ett hjälpmedel till kursen FTEA21:4, *Filosofisk Logik*, vid filosofiska institutionen, Lunds Universitet. Den skall tas som sådant, tillsammans med föreläsningarna, och boken ”Language, Proof and Logic” av Barwise & Etchemendy, 2:a utgåvan (hädanefter B&E), som är officiell kurslitteratur. Sid- och kapitelhänvisningar nedan är till denna bok, och bör ses som tips för att läsa vidare om och få bättre förståelse för saker som tas upp här. *Uppgifter* som ges här skall ses som förslag; gör så många av uppgifterna i boken som du behöver för att känna att du förstår avsnittet någotsånär.

Om kursen:

Kursen i filosofisk logik kan delas upp i två komponenter.

- A. Mängdlära (kap. 15), som kommer att vara nödvändigt för den sista komponenten, men som också i sig självt är oerhört användbart för en filosof. Det utgör dessutom ett bra exempel på en formell teori som faktiskt används. Vi kommer att studera både praktiskt tillämpad mängdlära och några filosofisk-logiska problem, såsom Russells paradox.
- B. Induktion & aritmetik (kap. 16). Ett mindre avsnitt som syftar till att ge ytterligare ett exempel på en formell teori, och som dessutom introducerar metoder som är användbara inom all logik.

- C. Metalogik (kap. 17-19), som handlar om formella egenskaper hos logiska system, såsom sundhet och fullständighet, och om viktiga logiska och semantiska begrepp (t.ex. *sanning* och *modell*), samt om *tolkningen* av ett logiskt system. Vi kommer framför allt att ge en översikt över detta område såsom det är tillämpligt på språket FOL.

De stycken ur boken som ingår i kursen, officiellt, är:

A.	I.	Tors 24 apr	Kap. 15 - 15.6
	II.	Fre 25 apr	Kap. 15.7 - 15.10
B.	III.	Mån 28 apr	Övningar kap. 15 Kap. 16 - 16.4
C.	IV.	Tis 29 apr	Övningar kap. 16. Kap. 17-17.2, 18-18.3
	V.	Fre 2 maj	Kap. 19-19.5
	VI.	Mån 5 maj	Övningar kap. 17- 19 Kap. 19.6 - 19.8

Om logik:

Logik är läran om korrekta slutledningar, d.v.s. hur man resonerar korrekt, inom alla möjliga olika områden. *Formell logik* (även kallad *symbolisk logik*) är det sätt att arbeta med logik som är mest välutvecklat för tillfället. Det kan sägas ligga till grund för all modern filosofi, och spelar i princip samma roll där som matematiken gör i naturvetenskaperna.

En av den formella logikens viktigaste uppgifter är att verka som ett universellt språk för filosofin, där resonemang och teorier på ett klarare och mer exakt sätt kan presenteras. På så sätt ger det filosofin en grad av *objektivitet* lik den som ges av experiment i vetenskaperna: vem som helst kan kontrollera om en härledning är giltig, och alla kommer fram till samma resultat om de använder samma regler. Formell logik är därför en nödvändighet för att kunna närma sig filosofiska frågor på ett vetenskapligt och icke-subjektivt sätt. Även om de flesta filosofer inte vardagligen uttrycker sig formellt, finns det anledning att hävda att ett kriterium på att en filosofisk position är substantiell är att den *går* att formalisera, d.v.s. uttrycka i formell logik.

Ämnet *filosofisk logik*, som den här delkursen handlar om, kan kontrasteras med *matematisk logik*. De är dock ganska lika varandra. Matematisk logik brukar ha något mer fokus på strukturer som används inom resten av matematiken, såsom mängdlära eller algebra, och filosofisk logik lägger ofta fokus mer på språk och strukturer som används inom filosofin.

Om informella bevis:

I den här delkursen kommer vi ofta att använda oss av *informella* bevis, istället för de formella som använts i förra delkursen. Ett informellt bevis kan ses som ett "recept" för att skapa ett formellt bevis, eller en starkt förkortad version av ett sådant. Anledningen att vi ger dem snarare än formella är i huvudsak två:

Praktikalitet: formella bevis av substantiella mängdteoretiska, metalogiska eller matematiska satser är ofta gigantiska, och nästan omöjliga att arbeta med för hand. Detta kan lösas genom att t.ex. använda ett datorprogram för bevishantering. Detta görs framför allt inom datalogi. Det traditionella sättet, som används inom t.ex. matematik, är dock att enbart ge informella bevis.

Förståelighet: i ett informellt bevis kan man ofta förklara de bakomliggande idéerna bättre. Ett formellt bevis säger vad det säger; informella bevis kan också säga varför de säger det. Detta kan lösas genom att varje formellt bevis får ett informellt som tillägg. I allmänhet så räcker dock det informella beviset för att en tränad logiker skall kunna fylla i det formella beviset själv.

Vi ger inga exempel på informella bevis här, då flertalet kommer att dyka upp senare.

Om modeller:

En annan nyhet i denna kurs är användandet av *modeller*. I logik betyder ”modell” i stort sett samma sak som ”tolkning”. Mer specifikt är en modell av en teori en tolkning av den teorin i en annan teori, d.v.s. en översättning av predikat $P(x_1, \dots, x_n)$ i den första teorin till formler $S(x_1, \dots, x_n)$ i den andra, där $x_1, \dots, x_n$ är fria variabler.

En modell av en teori i en annan är ofta av användning för båda teorierna: den tillåter att saker vi vet om den ena av dem förs över på den andra. Den kanske viktigaste användningen av modeller i logik är inom metalogiken, där språk i FOL översätts till mängdlära, och informella bevis sedan ges om denna översättning. De flesta av de satser som vi kommer att gå igenom i denna del skulle vara omöjliga att genomföra utan denna översättning.

I. Mängdlära

15

Vad är mängdlära?

Mängdläran handlar om så kallade *mängder*, och räknas numera vanligen som en del av matematiken, men den ingår också traditionellt i den matematiska logiken. För den moderna logikens anfäder Boole och Frege var dock även mängdbegreppet ett rent logiskt begrepp. Men vad är en mängd? Det finns två sätt att närma sig det:

(i) En mängd är en *klass*: extensionen av ett predikat, ett begrepp, eller ett villkor, d.v.s. allt som uppfyller villkoret. Eftersom mängden nödvändigt bestäms av ett begrepp, och begrepp är något som traditionellt är logikens område, är själva mängden här ett mer logiskt objekt.

(ii) En mängd är en *samling av ting*, samlade ”i tanken” till ett annat ting. Mängden som sådan har ingen nödvändig koppling till något begrepp, och därför räknas mängdläran här ofta som mer matematisk.

Nuförtiden tycks tolkning (ii) vara vanligare (jfr B&E), men det är ändå mest rättvisande att se modern mängdlära som produkten av inspiration från båda tolkningarna.

Naiv mängdlära

15.1

En *mängd* är ett objekt, vartill en eller flera antal andra objekt står i relationen *medlemskap* (med ett undantag, som vi skall se senare). Om b är en mängd och a är ett objekt, skriver vi $a \in b$ om a är en medlem i b . Ibland kallas samma relation att a är ett *element* i b . Vi förkortar $\neg(a \in b)$ som $a \notin b$.

Låt $x, y, z, \dots$ vara variabler över domänen av alla objekt, och a, b, c , vara variabler över domänen av mängder. Vi kan specificera en mängd på två sätt: genom att räkna upp dess medlemmar (jfr tolkning (ii)) eller genom att ge ett villkor som alla dess medlemmar och inga andra uppfyller (jfr tolkning (i)). Den första metoden kan givetvis bara användas när mängden har ett ändligt antal medlemmar. Om b innehåller talen 1, 6 och 7, och inget annat, så skriver vi $b = \{1, 6, 7\}$. Den andra metoden, däremot, kan bara användas då vi på något sätt kan specificera vilka element som skall ingå, lämpligen genom att använda ett predikat. Om b t.ex. är mängden av alla udda tal, predikatet $T(x)$ uttrycker att x är ett tal, och $U(x)$ att x är udda, skriver vi $b = \{x \mid T(x) \wedge U(x)\}$ – i ord ” b är mängden av de x sådana att $T(x)$ och $U(x)$ ”.

Extensionalitet, abstraktion

15.1

Från både tolkning (i) och tolkning (ii) ovan går att motivera att mängden a är identisk med mängden b om de har exakt samma medlemmar. Detta kallas för *extensionalitetssaxiomet*, och betyder att en mängd bestäms entydigt av att vi för alla objekt bestämmer om de ingår i denna mängd eller inte. Det innebär att *ordningen* vi skriver element i, när vi räknar upp dem, inte har någon betydelse. Det innebär också att det är meningslöst att påstå något sådant som att en mängd innehåller *två* exemplar av någonting: antingen ingår objektet eller så gör det inte det, och det finns inget sådant som att ingå ”två gånger”. Vi skriver extensionalitetssaxiomet i FOL som

$$\forall a \forall b (\forall x (x \in a \leftrightarrow x \in b) \rightarrow a = b)$$

Abstraktionsaxiomet (eng. *comprehension*) är den andra principen i den naiva (intuitiva) mängdläran. Det säger, att varje formel $P(x)$ i FOL med en fri variabel x entydigt bestämmer en mängd – närmare bestämt mängden av alla ting som gör $P(x)$ till en sann sats om x tar någon av dem som värde:

$$\exists a \forall x (x \in a \leftrightarrow P(x))$$

Om a är mängden av objekt som uppfyller villkoret $P(x)$, så skriver vi $a = \{x \mid P(x)\}$. Om a t.ex. är mängden av alla små kuber, kan vi skriva detta som $a = \{x \mid \text{Small}(x) \wedge \text{Cube}(x)\}$.

Ett andra sätt att specificera en mängd är genom uppräknings av dess element: $a = \{c, d, e\}$. Detta kan ses som en förkortning av

$$a = \{x \mid x = c \vee x = d \vee x = e\}$$

Från detta följer t.ex. att $\{c, d, e, d, c\} = \{d, c, e, e\}$, då

$$\forall x ((x = c \vee x = d \vee x = d \vee x = c) \leftrightarrow (x = d \vee x = c \vee x = e \vee x = e))$$

är en logisk sanning.

Små mängder

15.2, 15.4

Från de två axiomen i naiv mängdlära följer existensen av många mängder. Den minsta mängden är den *tomma mängden*

$$\emptyset =_{df.} \{x \mid x \neq x\}$$

Denna kan vara svår att tolka som något som vi vanligen ser som en ”mängd” eller ”samling”, men den är lätt att tolka som extensionen av ett begrepp (begreppet att inte vara självidentisk). Detta är ett bra exempel på hur både tolking (i) och tolking (ii) ovan behövs för att motivera mängdläran.

Något större är *singletonmängden* av varje objekt c , varmed vi menar den mängd som bara innehåller c och inget annat. Denna definieras som

$$\{c\} =_{df.} \{x \mid x = c\}$$

Mängder med två element kan också definieras, som

$$\{c, d\} =_{df.} \{x \mid x = c \vee x = d\}$$

för varje par av element c, d . Existensen av alla dessa mängder följer från abstraktionsaxiomet, och deras unikheter från extensionalitetsaxiomet.

Med hjälp av existensen av par och singletonmängder kan vi också definiera *ordnade par*. Ett ordnat par är ett där både ordningen och antalet förekomster av varje objekt har betydelse. De skrivs vanligen som $\langle c, d \rangle$. Den princip ett sådant objekt måste uppfylla är

$$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \leftrightarrow (a = c \wedge b = d) \quad (*)$$

Detta skiljer sig från oordnade par, som istället uppfyller

$$\{a, b\} = \{c, d\} \leftrightarrow \forall x (x = a \vee x = b) \leftrightarrow (x = c \vee x = d)$$

vilket följer från extensionalitetsaxiomet.

Det finns många sätt att definiera ordnade par: allt vi behöver är att hitta en tvåställig funktion $f(x, y)$ som uppfyller (*). Ett vanligt sätt att göra detta gavs av Kuratowski 1921:

$$\langle x, y \rangle =_{df.} \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Med hjälp av ordnade par kan vi definiera ordnade tripplar, kvadrupplar, etc. Dessa bör uppfylla

$$\begin{aligned} \langle a, b, c \rangle &= \langle a', b', c' \rangle \leftrightarrow (a = a' \wedge b = b' \wedge c = c') \\ \langle a, b, c, d \rangle &= \langle a', b', c', d' \rangle \leftrightarrow (a = a' \wedge b = b' \wedge c = c' \wedge d = d') \end{aligned}$$

etc. En samling definitioner som gör detta är

$$\begin{aligned} \langle a, b, c \rangle &=_{df.} \langle a, \langle b, c \rangle \rangle \\ \langle a, b, c, d \rangle &=_{df.} \langle a, \langle b, \langle c, d \rangle \rangle \rangle = \langle a, \langle b, c, d \rangle \rangle \end{aligned}$$

Alla ändliga sekvenser av objekt (*n-tuplar*) representeras på detta sätt. Imorgon skall vi också titta på oändliga sekvenser.

UPPGIFTER: 15.4, 15.6, 15.10, 15.28, 15.30, 15.31

Några användbara konstruktioner

15.5

Från två mängder a och b kan vi bilda följande nya mängder:

Snittet av a och b (i symboler $a \cap b$, eng. *intersection*). Den mängd som innehåller allt som finns i *både* a och b :

$$a \cap b =_{df.} \{x \mid x \in a \wedge x \in b\}$$

Om a och b inte överlappar är snittet av dem nollmängden.

Unionen av a och b (i symboler $a \cup b$, eng. *union*). Den mängd som innehåller det som finns i a och det som finns i b , eller alternativt, den mängd som innehåller de objekt som är element i a eller b :

$$a \cup b =_{df.} \{x \mid x \in a \vee x \in b\}$$

Differensen av a och b (i symboler $a \setminus b$, alt. $a - b$, eng. *difference*). Den mängd som innehåller alla element i a som *inte* är element i b :

$$a \setminus b =_{df.} \{x \mid x \in a \wedge x \notin b\}$$

UPPGIFTER: 15.19, 15.24

Relationer

15.5

Den huvudsakliga användningen av mängdlära är för att ”bygga” abstrakta objekt. Mängderna utgör en mycket rik struktur vari man kan tolka mer eller mindre vad som helst. Eller alternativt: mängdlära ger modeller för nästan alla teorier. Så länge man bara bryr sig om logisk struktur, så räcker därför mängdlära ofta för att specificera en teori fullständigt.

Ett exempel på sådant modellerande är tolkningen av *relationer* som mängder. En n -ställig relation $R(x_1, \dots, x_n)$ kan tolkas som en mängd r vars element är ordnade n -tuplar $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, så att

$$R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in r$$

Det följer att två relationer R, S för vilka $R(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow S(x_1, \dots, x_n)$ håller tolkas som *samma* mängd r . Vi uttrycker detta genom att säga att r ger *extensionen* av R och S .

Många typer av relationer har speciella namn då de ofta uppkommer när man modellerar. Vi kan se detta som att relationen har en viss *egenskap*. Det är dock viktigt att inte tolka ”egenskap” här som någon sorts högre ordningens predikat, eller som någon metafysisk

entitet. Att $P(x)$ har en viss egenskap betyder bara att vissa formler som innehåller P håller. Några användbara sådana egenskaper är de följande:

Reflexivitet: $\forall x R(x, x)$

Irreflexivitet: $\forall x \neg R(x, x)$

Transitivitet: $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z))$

Symmetri: $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow R(y, x))$

Asymmetri: $\forall x \forall y (R(x, y) \rightarrow \neg R(y, x))$

Antisymmetri: $\forall x \forall y ((R(x, y) \wedge R(y, x)) \rightarrow x = y)$

Givet en relation R kan vi bilda dennas *invers* R^{-1} : den relation i vilken x står till y om och omvänt y står i R till x . Om r är extensionen av relationen R , bildar vi inversens extension r^{-1} som

$$r^{-1} = \{\langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in r\}$$

Vi kan se att en relation är identisk med sin egen invers om och omvänt relationen är symmetrisk.

En särskilt viktig typ av tvåställig relation är *ekvivalensrelationerna*. Vi säger att R är en *ekvivalens* om R är reflexiv, transitiv och symmetrisk. Exempel är "Lika lång som", "Lika gammal som", "Samma färg som". Det användbara med ekvivalensrelationer är att de delar upp domänen i klasser eller kategorier: "Lika lång som" kan t.ex. användas för att dela upp domänen i klasser efter hur långa individerna är.

Uppdelningen genomförs formellt på följande sätt: för varje $x \in D$, låt $[x]_R$ vara följande mängd:

$$[x]_R =_{\text{df.}} \{y \mid R(x, y)\}$$

Mängden $[x]_R$ är alltså mängden av allt i domänen som x står i relationen R till. Eftersom R är reflexiv har vi att $x \in [x]_R$. Vi kan också visa att varje individ i domänen ingår i exakt en sådan klass. Vi kallar dessa för *ekvivalensklasser* under relationen R .

Ekvivalensklasser är användbara för att gå från en relation till något som mer liknar en egenskap. I fallet "Lika lång som" kan vi låta ekvivalensklasserna vara extensioner av predikat för olika längder. För "samma färg som" ger ekvivalensklasskonstruktionen upphov till extensioner av predikat som motsvarar olika färger.

UPPGIFTER: 15.40, 15.44

Funktioner

15.6

En funktion kan ses som en sorts relation: en som entydigt bestämmer något av sina argument, givet de övriga. En enställig funktion $f(x)$ kan t.ex. ses som en relation $F(x, y)$ som uppfyller

$$\forall x \exists ! y R(x, y)$$

I B&E kallas detta en *total funktion*; de använder *funktion* för en relation R som uppfyller

$$\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow x = y)$$

Den betydelse som vi använder här är dock betydligt vanligare. En relation som uppfyller $\forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(x, z)) \rightarrow x = y)$ kallas då en *partiell funktion*.

I matematiken är varje funktion (partiell och total) associerad med två mängder: dess *domän* och dess *kodomän*. Dessa är mängder a, b sådana att om $f(x) = y$, så håller $x \in a$ och $y \in b$. En funktion f med domän a och kodomän b skrivs $f: a \rightarrow b$.¹ En funktions *värdeomängd* (eng. *range*) är den mängd av värden den tar, d.v.s. mängden

$$\{y \mid \exists x f(x) = y\}$$

En funktion vars värdeomängd är samma som dess kodomän kallas *surjektiv* (eng. *surjective* eller *onto*). Om två olika element i domänen alltid tas till olika element i kodomänen kallas funktionen *injektiv*. Formellt blir detta

$$\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y))$$

eller ekvivalent

$$\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y)$$

En funktion som är både injektiv och surjektiv kallas för en *ett-till-ett-korrespondens*. En sådan funktion ordnar varje element i domänen till ett och endast ett element i kodomänen, d.v.s. den ”parar ihop” elementen i domänen och kodomänen. Sådana funktioner är av stor betydelse för teorin om oändliga mängder.

UPPGIFTER: 15.51, 15.56

¹ Notera användningen av ' $\rightarrow$ ' här, och blanda inte ihop den med konditionalen. De kan skiljas på genom att konditionalen håller mellan *formler* medan ' $\rightarrow$ ' i beskrivningen av en funktion håller mellan *termer*. Hela uttrycket $f: a \rightarrow b$ kan ses som ett treställigt predikat med betydelsen ” f är en funktion med domän a och kodomän b ”.