Filosofisk Logik

(FTEA21:4)

föreläsningsanteckningar
II

v. 2.0, *den* 25/4 2013

Delmängder och potensmängder

En viktig relation som kan hålla mellan mängder är *delmängdsrelationen*, som vi skriver $a \subseteq b$ och definierar

$$a \subseteq b \text{ omm } \forall x(x \in a \rightarrow x \in b)$$

Det följer från definitionen och extensionalitetsaxiomet att $a = b \leftrightarrow a \subseteq b \wedge b \subseteq a$. Vi har också alltid att $\varnothing \subseteq a$ och $a \subseteq a$.

Det är viktigt att skilja delmängdsrelationen från elementrelationen. I den Fregeanska tolkningen säger $x \in a$ att x har egenskapen a, och $a \subseteq b$ att allt som har egenskapen a också har egenskapen b. Vi har t.ex.

$$x \in \{x\} \text{ men } \neg x \subseteq \{x\}$$
$$\{x\} \notin \{x, \text{y}\} \text{ men } \{x\} \subseteq \{x, y\}$$

Med hjälp av delmängdsrelationen kan vi för varje mängd a bilda *potensmängden* $\wp(a)$, definierad som

$$\wp(a) =_{df.} \{x \mid x \subseteq a\}$$

För potensmängden $\wp(a)$ gäller alltid att $a \in \wp(a)$, $\varnothing \in \wp(a)$ och $\{a\} \in \wp(a)$.

UPPGIFTER: 15.61, 15.62

Att mäta mängders antal

I förra delkursen representerade vi det *antal* objekt som faller under ett visst predikat med hjälp av numerisk kvantifiering (de definierade kvantifikatorerna $\exists^{!n}$). Detta fungerar bara på predikat som ett ändligt antal objekt faller under. Det är också omöjligt att bevisa saker för sådana tal *i allmänhet*, även om vi alltid kan bevisa saker om specifika tal.

Mängdlära ger större möjligheter: eftersom varje predikat P(x) motsvarar en mängd $\{x \mid P(x)\}$ så kan vi istället mäta antalet element i sådana mängder. Men vad betyder det att mäta ett sådant antal?

Den princip som används mest är vad som kommit att kallas *Humes princip*: två mängder har lika många element omm det finns en ett-till-ett-korrespondens mellan dem. Mängden a har minst lika många element som b omm det finns en injektiv funktion f: $b \to a$. Om a har minst lika många element som b så skriver vi $|b| \leq |a|$, och om a och b har lika många element skriver vi $|b| = |a|$. Om $|a| \leq |b|$ men $|a| \neq |b|$ skriver vi $|a| < |b|$. Cantor använde dessa definitioner för att visa flertalet viktiga teorem om mängdläran. Det viktigaste av dessa är

Teorem: För varje mängd a gäller att $|a| < |\wp(a)|$
Bevis: se B&E, s. 440.

Detta visar att för varje mängd finns det någon mängd med strikt sett fler element. Alltså finns det, för varje tal k, någon mängd som har mer än k element. Detta visste vi redan för ändliga tal: om a har k element så har $\wp(a)$ 2^k element. Hur är det med oändliga mängder? Finns det ens sådana?

I naiv mängdlära är svaret är ja: t.ex. mängden

$$V = \{x \mid x = x\}$$

Eftersom det finns åtminstone godtyckligt ändligt antal mängder så måste V innehålla strikt fler element än alla ändliga tal, d.v.s. vara oändlig.
UPPGIFTER: 15.61, 15.62

Russells och Cantors paradoxer

Naiv mängdlära är inkonsistent. Detta följer direkt från Cantors teorem och existensen av V: vi har att $\wp(V) \subseteq V$, så $|\wp(V)| \leq |V|$. Men från Cantors teorem har vi $|V| < |\wp(V)|$. Detta kallas för *Cantors paradox*. Den upptäcktes av Cantor kring år 1900.

Russell försökte år 1902 isolera vad det var i Cantors paradox som gav upphov till motsägelsen, och kom då fram till följande förenkling: från abstraktionsaxiomet följer existensen av mängden

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

Det är en logisk sanning att $R \in R \vee R \notin R$. Men anta att $R \in R$; då håller $R \notin R$ enligt definitionen av R, så vi har både $R \in R$ och $R \notin R$. Anta att $R \notin R$. Då håller $R \in R$, återigen per definitionen av R. Tillämpa $\vee$elim, och få att $R \in R \vee R \notin R$ ger en motsägelse.

Dessa paradoxer visar att vare sig R eller V kan existera. Men deras existens följer från abstraktionsaxiomet, och därför måste det vara falskt.

UPPGIFTER: 15.66

Zermelo-Fraenkels mängdlära

År 1908 gav Ernst Zermelo ett axiomsystem för mängdlära som inte ger upphov till Cantors eller Russells paradoxer. Detta system vidareutvecklades senare av Abraham Fraenkel, och blev det vanligaste systemet för mängdlära idag: ZFC, för *Zermelo-Fraenkel with Choice*.

ZFC räcker för att bevisa mer eller mindre allt matematiker ville ha mängdlära till, och ännu har ingen hittat någon motsägelse i systemet.

ZFC består av totalt 7 axiom och två axiomscheman:

Extensionalitet:	samma som i naiv mängdlära.
Oordnade par:	$\forall x \forall y \exists c \forall z (z \in c \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$
Union:	för varje mängd c av mängder finns det en mängd som innehåller allt som finns i c:s element och inget annat.
Potensmängd:	för varje mängd c finns $\wp(c)$.
Oändlighet:	det finns en mängd i sådan att $\varnothing \in i$ och om $x \in i$ så $\{x\} \in i$.
Grundadhet:	varje icke-tom mängd c har något element $x \in c$ sådant att $x \cap c = \varnothing$.
Urval:	För varje mängd c av icke-tomma mängder finns det en mängd som innehåller exakt ett element från varje element i c.

De två axiomschemana är

Separation:	För varje formel P(x) med x fri och mängd c finns en mängd d sådan att $x \in d$ omm $x \in c$ och P(x).
Utbyte:	För varje tvåställigt predikat P(x, y) sådant $\forall x \forall y \forall z((\mathrm{P}(x, y) \wedge \mathrm{P}(x, z)) \rightarrow y = z)$ gäller att om P:s domän är en mängd, så är P:s värdemängd också är en mängd.

Separation är en försvagning av abstraktionsprincipen. Axiomet bygger på Cantors idé att vad som är problemet med *V* och *R* är att de är *för stora* för att kunna tänkas på som enskilda objekt. Varken separations- eller utbytesaxiomen kan ge mängder som har fler element än de vi började med. Det är detta som är anledningen till att vi behöver de flesta av de övriga axiomen: de krävs för att bygga upp mängder ”nedifrån”, d.v.s. från nollmängden. Dennas existens följer i sin tur från paraxiomet tillsammans med separationsschemat.

UPPGIFTER: 15.71, 15.72, 15.76