

Filosofisk Logik

(FTEA21:4)

föreläsningssanteckningar/kompendium

III

v. 2.0, den 28/4 2013

II. Induktion & aritmetik

16

Explicita och implicita definitioner

En *explicit* definition är den enklaste formen av definition: den specificerar betydelsen av ett uttryck (*definiendum*) helt i termer av ett annat (*definiens*) sådant att det första uttrycket alltid kan bytas ut mot det andra; t.ex.

$$\exists^{\leq 2} x P(x) \equiv_{df.} \forall x \forall y \forall z ((P(x) \wedge P(y) \wedge P(z)) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z))$$

En *implicit* definition är istället ett villkor, d.v.s. en formel $S(x)$ med en fri variabel x . Den kan användas på två sätt:

1. För att definiera ett *enskilt objekt*. För att definitionen skall fungera behöver vi då visa att det finns exakt ett objekt som uppfyller $S(x)$. En definition som inte gör detta
2. För att definiera en *mängd*: mängden av objekt som uppfyller $S(x)$.

Ett implicit definierat uttryck kan *inte* alltid ersättas med sin definiens, eftersom denna inte alltid är given som ett uttryck självt.

Induktiva definitioner

16.1, 16.2

En induktiv definition är en typ av implicit definition av ett predikat $S(x)$, eller den motsvarande mängden $s = \{x \mid S(x)\}$, som består på tre element:

1. Ett *bassteg*. Detta är en uppräknings av objekt som uppfyller $S(x)$. Det är vanligtvis en ändlig uppräknings, men den kan också ha givits av en tidigare definition.
2. Ett *induktivt steg*. Detta säger att om ett objekt x uppfyller $S(x)$, så uppfyller också objekten $y_1, \dots, y_n$ $S(x)$.

3. Ett *avslutande steg*. Detta säger att ingenting utom det som givits av steg 1. och 2. uppfyller $S(x)$.

Det är viktigt att se att steg 2. kan tillämpas hur många gånger som helst: om vi har att c är en term ger att $f(c)$ är en term, så är även $f(f(c))$, $f(f(f(c)))$ etc. termer. Steg 2. kan också innehålla flera villkor, som i definitionen av en satslogisk sats: denna säger att om S och T är satser, så är också $\neg S$, $(S \wedge T)$, $(S \vee T)$, $(S \rightarrow T)$ och $(S \leftrightarrow T)$ satser.

Hur formaliserar vi det tredje steget? Med mängdlära.¹ Vi börjar med att notera att steg 1. och 2. i sig definierar en *mängd* m av *mängder*, nämligen de mängder som uppfyller villkor 1. och 2.

$$m = \{c \mid b \subseteq c \wedge \forall x (x \in c \rightarrow (f_1(x) \in c \wedge \dots \wedge f_n(x) \in c))\}$$

Här är b den mängd av objekt som givits i bassteget, och $f_1, \dots, f_n$ funktioner som beskriver det induktiva steget. Mängderna i m kommer dock att också innehålla mycket annat som inte uppfyller 1. och 2. För att få bort dessa tar vi *snittet* av alla mängder i m :

$$m' = \bigcap m$$

Mängden m' innehåller allt som är i *alla* mängder som uppfyller 1. och 2. Ett annat sätt att säga detta är att den inte innehåller något som inte krävs av 1. och 2.

Induktiva bevis

16.1, 16.2

När vi har satt upp en induktiv definition av ett begrepp kan vi använda den för att göra induktiva *bevis*, d.v.s. bevis av att *alla* element i en induktivt definierad mängd m har en viss egenskap. Dessa är inte egentligen en ny form av bevis: de kan utföras helt och hållet i FOL, med tillägget av mängdlära. Det ”nya” med dem är att de använder sig av induktiva definitioner. Ett induktivt bevis av att alla S är T , där S är ett induktivt definierat predikat, består av 2 steg:

1. Bassteget: vi visar att objekten i bassteget som användes för att definiera $S(x)$ uppfyller $T(x)$.
2. Det induktiva steget. Vi visar att om $S(x)$ håller, så håller $S(f_1(x)) \wedge \dots \wedge S(f_n(x))$, där $f_1, \dots, f_n$ återigen är funktioner som beskriver det induktiva steget i definitionen.

För några exempel, se s. 457-460 i B&E.

UPPGIFTER: 16.1, 16.2, 16.6

Aritmetik

16.3, 16.4

Det mest berömda exemplet på en induktiv definition är den varigenom de naturliga talen ges:

1. 0 är ett naturligt tal.
2. Om n är ett naturligt tal, så är $n + 1$ ett naturligt tal.
3. Ingenting annat är ett naturligt tal.

¹ Eller i högre ordningens logik, som Frege från början gjorde.

Om vi har mängdlära i bakgrunden, så räcker detta för att definiera aritmetiken: vi kan införa addition, multiplikation, subtraktion, division etc. med hjälp av induktiva definitioner på dessa tal. Ofta är det emellertid användbart att inte anta mängdlära när vi arbetar med aritmetik. De naturliga talen är en betydligt mindre struktur än det mängdteoretiska universumet, och vi har större anledning att tro att det är konsistent. För att få en användbar definition för FOL utan mängdlära måste vi dock också ta med addition och multiplikation i definitionen. Den mest kända uppsättningen axiom kallas för *Peanoaxiomen*, och består av 6 axiom och ett axiomschema (se s. 468-470).

Peanoaxiomen ger, vid sidan om ZFC, kanske det historiskt viktigaste exemplet på en första ordningens teori. Vi kan tolka dem i mängdläran, så om mängdläran är konsistent så är även peanoaritmetiken det.² PA är den teori som Gödels ofullständighetsbevis oftast formaliseras i.

UPPGIFTER: 16.14, 16.19, 16.20, 16.24

² Motsatsen håller dock inte.