

Filosofisk Logik

(FTEA21:4)

föreläsningssanteckningar/kompendium

IV

v. 2.0, den 29/4 2013

III. Metalogik

17-19

Modeller för satslogiken

18.1

Vi har tidigare sagt att en *modell* är en tolkning av en teori i en annan. Att tolka *satslogiken* innebär att ge en översättning från ett satslogiskt språk till ett annat språk. Det vanligaste språk vi gör en sådan tolkning i är mängdlära, då mängdläran innehåller många användbara bevismetoder som vi kan använda för att visa teorem om satslogiken.

För satslogiken är det enda som har betydelse *sanningsvärdena* S, F; detta är det vi använder då vi gör sanningsvärdestabeller. Proceduren för att göra en rad i en sanningsvärdestabell kan sägas gå till såhär:

1. Vi sätter ut ett av värdena s, f på varje atomär sats.
2. För varje komplex sats räknar vi ut ett nytt sanningsvärde med hjälp av tabellerna för konnektiven.

Detta betyder att en tolkning kan ses som en *funktion* från det satslogiska språket till mängden $\{S, F\}$. För att fånga betydelsen hos konnektiven behöver vi begränsa de värden en sådan funktion kan anta. Detta görs genom följande induktiva definition:

En *sanningsvärdestilldelning* är en funktion h från satserna i ett satslogiskt språk till mängden $\{S, F\}$ sådan att

1. Varje atomär sats tilldelas S eller F.
2. För komplexa satser håller följande:
 - 2.1. Om $h(P) = S$ och $h(Q) = S$ så håller $h(\neg P) = F$, $h(\neg Q) = F$, $h(P \wedge Q) = S$, $h(P \vee Q) = S$, $h(P \rightarrow Q) = S$ och $h(P \leftrightarrow Q) = S$.
 - 2.2. Om $h(P) = S$ och $h(Q) = F$ så håller $h(\neg P) = F$, $h(\neg Q) = S$, $h(P \wedge Q) = F$, $h(P \vee Q) = S$, $h(P \rightarrow Q) = F$ och $h(P \leftrightarrow Q) = F$.
 - 2.3. Om $h(P) = F$ och $h(Q) = S$ så håller $h(\neg P) = S$, $h(\neg Q) = F$, $h(P \wedge Q) = F$, $h(P \vee Q) = S$, $h(P \rightarrow Q) = S$ och $h(P \leftrightarrow Q) = F$.

2.4. Om $h(P) = F$ och $h(Q) = F$ så håller $h(\neg P) = S$, $h(\neg Q) = S$, $h(P \wedge Q) = F$, $h(P \vee Q) = F$, $h(P \rightarrow Q) = S$ och $h(P \leftrightarrow Q) = S$.

Ett exempel på en sanningsvärdestilldelning är en rad i en sanningsvärdestabell. En uppsättning modeller för en logik kan kallas en *semantik* för den logiken.

UPPGIFTER: 17.2

Sundhet och fullständighet

En viktig användning av modeller är för att formalisera logisk konsekvens. Detta görs enligt följande definition:

Q är en *logisk konsekvens* av mängden av premisser $\mathcal{T}$ omm Q är sann i varje modell där alla satser i $\mathcal{T}$ är sanna.

Vi har också följande specialiseringar av begreppet:

Q är en *kontradiktion* omm det inte finns någon modell där Q är sann.
 Q är en *tautologi* omm Q är sann i alla modeller.

För satslogiken innebär att Q är sann i modellen f helt enkelt att $f(Q) = S$, eftersom en modell bara är en sådan funktion.

Så snart vi har ett sätt att göra modeller av en teori uppkommer frågan om hur väl dessa modeller kan representera teorin. För detta är det användbart att introducera lite terminologi:

$\mathcal{T} \vdash_{\mathbf{H}} Q$ omm det finns en härledning från premisserna i $\mathcal{T}$ med Q som slutsats.

$\mathcal{T} \models_{\mathbf{S}} Q$ omm Q är en logisk konsekvens av $\mathcal{T}$.

Här är $\mathbf{S}$ en semantik och $\mathbf{H}$ ett härledningssystem, d.v.s. en uppsättning regler som bestämmer vilka härledningar som är tillåtna.

Vad betyder *det finns en härledning*? Att vi kan definiera en sekvens av satser $S = \langle S_1, \dots, S_m \rangle$ sådan att

1. $S_1, \dots, S_n$ är medlemmarna av $\mathcal{T}$ och $n \leq m$.
2. S_{k+1} kan erhållas från $S_1, \dots, S_k$ genom att tillämpa någon av härledningsreglerna på någon eller några av satserna $S_1, \dots, S_k$, där $n \leq k < m$.
3. S_m är slutsatsen.

Den grundläggande frågan - kanske den fundamentala metalogiska frågan för varje logik - är hur $\vdash$ och $\models$ är relaterade. Vi har två särskilt viktiga villkor här:

Härledningssystemet $\mathbf{H}$ är *sunt* med avseende på semantiken $\mathbf{S}$ omm $\mathcal{T} \vdash_{\mathbf{H}} Q \Rightarrow \mathcal{T} \models_{\mathbf{S}} Q$ för varje mängd $\mathcal{T}$ av satser och alla satser Q .

Härledningssystemet $\mathbf{H}$ är *fullständigt* med avseende på semantiken $\mathbf{S}$ omm $\mathcal{T} \models_{\mathbf{S}} Q \Rightarrow \mathcal{T} \vdash_{\mathbf{H}} Q$ för varje mängd $\mathcal{T}$ av satser och alla satser Q .

Sundhet är ofta förhållandevis enkelt men arbetsamt att bevisa; skriver man en lärobok i logik det är vanligt att lämna det som en övningsuppgift så att man inte själv behöver skriva ner allt. Det görs genom att alla härledningsregler går igenom en och en, och att man bevisar att om en mängd av satser är sann i en viss modell, så är även resultatet av att tillämpa härledningsregeln sant i denna modell. Sundhetsteoremet följer sedan genom induktion.

Bevis av fullständighets för satslogiken

17.2

Hur bevisar vi fullständighet? Ett första förslag: genom att ge en algoritm för att generera ett bevis av Q från $\mathcal{T}$, som terminerar (d.v.s. når fram till ett resultat) om $\mathcal{T} \models_{\mathcal{S}} Q$. För satslogiken går faktiskt detta att göra, men för FOL är det omöjligt. Vi kommer därför att gå till väga på ett annat sätt, som är tillämpbart på FOL också, och som dessutom är enklare (om än inte på något vis *enkelt* – fullständighet är alltid någotsånär komplicerat att visa).

Först behöver vi några lemmor:

Lemma: $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{H}} Q$ omm $\mathcal{T} \cup \{\neg Q\} \vdash_{\mathcal{H}} \perp$.

Vi börjar med att skriva om $\mathcal{T} \models_{\mathcal{S}} Q \Rightarrow \mathcal{T} \vdash_{\mathcal{H}} Q$ som $\mathcal{T} \not\models_{\mathcal{S}} Q \Rightarrow \mathcal{T} \not\vdash_{\mathcal{H}} Q$. Men enligt deduktionssatsen är detta ekvivalent med $\mathcal{T} \cup \{\neg Q\} \not\models_{\mathcal{S}} \perp \Rightarrow \mathcal{T} \cup \{\neg Q\} \not\vdash_{\mathcal{H}} \perp$: om det inte finns någon härledning från $\mathcal{T} \cup \{\neg Q\}$ till $\perp$ så är $\mathcal{T} \cup \{\neg Q\}$ konsistent, d.v.s. $\mathcal{T} \cup \{\neg Q\}$ är sann i någon modell. Men att detta håller för alla $\mathcal{T}$ och alla Q följer av att det håller för alla mängder $\mathcal{T}'$ av premisser. Alltså räcker det att bevisa:

Teorem: om $\mathcal{T}'$ är konsistent så har $\mathcal{T}'$ en modell.

Låt en *formellt fullständig*¹ mängd $\mathcal{T}$ av satser vara en mängd sådan att, för alla satser Q , så har vi antingen $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{H}} Q$ eller $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{H}} \neg Q$. Teoremet kan bevisas i två steg:

1. Visa att för varje formellt fullständig satsmängd $\mathcal{T}$ har en modell.
2. Visa att varje konsistent satsmängd $\mathcal{T}$ kan utvidgas till en formellt fullständig konsistent satsmängd $\mathcal{T}'$ (d.v.s. att $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$).

Steg 2 görs genom att gå igenom alla atomära satser P , och lägga till P om vare sig $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{H}} P$ eller $\mathcal{T} \vdash_{\mathcal{H}} \neg P$. Genom att göra en induktion på satserna i satslogiken kan vi sedan visa att det gäller för alla satser Q att $\mathcal{T}'$ inte innehåller både Q och $\neg Q$ om inte $\mathcal{T}$ gjorde det.

För steg 2 kan vi göra en modell på följande sätt: börja med att sätta $f(P) = S$ omm $P \in \mathcal{T}$, för alla atomära satser P . För komplexa satser fyller vi sedan i sanningsvärdena enligt semantiken ovan (d.v.s. sanningsvillkoren för konnektiven). Det följer från sundhetssatsen att en sådan tilldelning är entydigt bestämd, d.v.s. den ger ett unikt värde ur $\{S, F\}$ för varje sats.

UPPGIFTER: 17.5, 17.9-17.12

¹ Notera att detta begrepp inte har särskilt mycket gemensamt med fullständighetsbegreppet vi introducerade ovan. Det är "vanlig" fullständighet som Gödels fullständighetsteorem handlar om, och formell fullständighet som hans ofullständighetsteorem handlar om.

Modeller för första ordningens logik

18.1

För FOL behöver vi använda modeller med mer struktur än för satslogiken. En *första ordningens modell* $\mathcal{M}$ för ett första ordningens språk $\mathcal{L}$ är en funktion från predikaten, individkonstanterna, funktionssymbolerna och allkvantifikatorn i $\mathcal{L}$ till mängder, sådan att

1. $\mathcal{M}(\forall) = D$ för någon mängd D som vi kallar *domänen* för $\mathcal{M}$.
2. $\mathcal{M}(c) \in D$ för alla individkonstanter c .
3. $\mathcal{M}(P)$, där P är ett n -ställt predikat, är en mängd av ordnade n -tuplar av element i D , d.v.s. en relationsextension för P .
4. $\mathcal{M}(f)$, där f är en n -ställig funktionssymbol, är en mängd av ordnade $n+1$ -tuplar $\langle x_1, \dots, x_n, y \rangle$ av element i D sådan att om $\langle x_1, \dots, x_n, y \rangle \in \mathcal{M}(f)$ och $\langle x_1', \dots, x_n', y \rangle \in \mathcal{M}(f)$ så har vi $x_1 = x_1' \wedge \dots \wedge x_n = x_n'$. D.v.s. en funktionsextension för f .

Ett sätt att tolka detta är att den modell för $\mathcal{L}$ består av en domän D , tillsammans med en tilldelning av extensioner i denna domän till varje individkonstant, predikat och funktionsymbol i $\mathcal{L}$. Vi kan ta detta som ett exempel på skillnaden mellan satslogiken och FOL: medan satslogiken bara handlar om sanningsvärden, handlar FOL om extensioner.

UPPGIFTER: 18.4

Satisfiering och sanning

18.2

Vad menar vi med att en första ordningens modell är *sann* i en modell $\mathcal{M}$? I satslogiken var detta enkelt, då vi tilldelade sanningsvärden direkt till satserna. I FOL går inte detta: för att bygga upp satser här behöver vi formler med fria variabler, och sanningsvärdena på dessa måste bero på vad variablerna tar för värden (d.v.s. refererar till). Säg att vi *skulle* tilldela sanningsvärde till t.ex. $P(x)$. Hur skulle vi räkna ut sanningsvärdet på $\forall x P(x)$ eller $\exists x P(x)$ från detta?

Den vanligaste lösningen på det här problemet använder sig av begreppet *satisfiering*. Vi säger att en *variabeltilldelning* i modellen $\mathcal{M}$ är en funktion v från variablerna i språket till element i $\mathcal{M}(\forall)$, d.v.s. en tilldelning av element i $\mathcal{M}$'s domän till variabler. En *värdering* i språket $\mathcal{L}$ baserad på tilldelningen v definierar vi som en funktion $\| t \|_v$, där t är någon term (variabel, individkonstant eller funktionsuttryck) i $\mathcal{L}$, till element i D , sådan att

1. $\| x \|_v = v(x)$ för alla variabler x .
2. $\| c \|_v = \mathcal{M}(c)$ för alla individkonstanter c .
3. $\| f(t_1, \dots, t_n) \|_v = \mathcal{M}(f)(\| t_1 \|_v, \dots, \| t_n \|_v)$ för alla n -ställiga funktionssymboler f .

Detta är ett typexempel på en induktiv definition: värderingen av variabler bestäms av en variabeltilldelning, värderingen av individkonstanter av modellen, och värderingen av funktionsuttryck genom att tillämpa modellens tolkning av funktionssymbolerna på värderingen av de argument vi tillämpar funktionen på.

För att fånga kvantifikatorerna behöver vi också införa en operation på tilldelningar. Vi skriver $v[x / c]$ för den tilldelning som är precis som v , förutom att den tilldelar elementet $c \in D$ till variabeln x istället för vad v tilldelar. Med hjälp av värderingar och denna operation kan vi nu ge en induktiv definition av vad satisfiering betyder. Vi skriver $\mathcal{M} \models_v P$ för *variabeltilldelningen v satisfierar P i modellen $\mathcal{M}$* , och definierar:

1. $\mathcal{M} \models_v P(t_1, \dots, t_n)$ omm $\langle \|t_1\|_v, \dots, \|t_n\|_v \rangle \in \mathcal{M}(P)$ för atomära formler P .
2. $\mathcal{M} \models_v Q \wedge R$ omm $\mathcal{M} \models_v Q$ och $\mathcal{M} \models_v R$.
3. $\mathcal{M} \models_v Q \vee R$ omm $\mathcal{M} \models_v Q$ eller $\mathcal{M} \models_v R$.
4. $\mathcal{M} \models_v Q \rightarrow R$ omm $\mathcal{M} \models_v Q$ eller $\mathcal{M} \not\models_v R$.
5. $\mathcal{M} \models_v Q \leftrightarrow R$ omm antingen $\mathcal{M} \models_v Q$ och $\mathcal{M} \models_v R$ eller $\mathcal{M} \not\models_v Q$ och $\mathcal{M} \not\models_v R$.
6. $\mathcal{M} \models_v \forall x Q$ omm $\mathcal{M} \models_{v[x/c]} Q$ för alla $c \in D$.
7. $\mathcal{M} \models_v \exists x Q$ omm $\mathcal{M} \models_{v[x/c]} Q$ för något $c \in D$.

Eftersom satser inte har några fria variabler alls kan vi visa att dessa antingen satisfieras av *alla* tilldelningar, eller av *inga*. I det första fallet kallar vi satsen *sann* och i det andra *falsk*.

UPPGIFTER: 18.7, 18.8