

Filosofisk Logik

(FTEA21:4)

föreläsningssanteckningar/kompendium

VI

v. 2.0, den 5/5 2014

Kompakthet och Löwenheim-skolemsatsen

19.6-19.7

Närhelst vi har en mängd satser i FOL som inte är självmotsägande kan vi konstruera en Henkinmodell vari alla satserna är sanna. Det betyder att vi, om vi tar FOL som ett sätt att beskriva världen, aldrig kan utesluta att världen är en sådan modell. Mer specifikt gäller att Henkinmodellerna alltid är *uppräknliga*, och alltså finns inget sätt i FOL att säga att det finns oupräknligt många ting. Formellt är detta känt som *Löwenheim-Skolems sats*: om $\mathcal{T}$ är en konsistent mängd satser i FOL så finns det en uppräknlig modell för $\mathcal{T}$.

Ett relaterat resultat är det som kallas för *kompakthetssatsen*. Denna säger att en mängd $\mathcal{T}$ av satser är konsistent om varje ändlig delmängd av satserna i $\mathcal{T}$ är konsistent, eller alternativt, att om P följer från mängden $\mathcal{T}$ av satser, så finns det en ändlig delmängd $\mathcal{T}'$ av $\mathcal{T}$ sådan att P följer av $\mathcal{T}'$. Detta innebär t.ex. att vi *inte* kan ge en första ordningens teori som fångar de naturliga talens struktur perfekt: antag att vi har ett system vari predikatet $N(x)$ har betydelsen "x är ett naturligt tal". Låt T vara följande uppräknligt oändliga mängd av satser:

(0)	$N(c)$
(1)	$c \neq 1$
(2)	$c \neq 2$
(3)	$c \neq 3$
(4)	$c \neq 4$
$\vdots$	$\vdots$

Om nu N verkligen fångade vad det innebar att vara ett naturligt tal, så skulle denna uppsättning satser leda till en motsägelse. Varje ändlig delmängd av den är däremot konsistent, och därför säger kompakthetssatsen att vi inte kan härleda någon motsägelse från hela mängden heller.

Gödels ofullständighetsteorem

19.8

Gödels ofullständighetsteorem är förmodligen det mest diskuterade resultatet i logiken under 1900-talet. Det rör en annan typ av fullständighet än den som omtalas i hans fullständighetsteorem: medan det sistnämndas betydelse är den som vi gått igenom tidigare, används ordet ”fullständig” i hans ofullständighetsteorem för det som i boken kallas ”formellt fullständig”. Vi säger att en satsmängd $\mathcal{T}$ är *formellt fullständig* omm, för varje sats P i språket, antingen $\mathcal{T} \vdash P$ eller $\mathcal{T} \vdash \neg P$.

Varför skulle vi vara intresserade av formellt fullständiga satsmängder? Om vi axiomatiserar en empirisk teori, så bör vi inte förvänta oss att den är formellt fullständig: inte ens en perfekt återgivning av Newtons fysik säger någonting om hur snabbt specifika ting rör sig eller vad de väger, även om den specificerar samband mellan dessa egenskaper. Satser om enskilda ting förväntas vi fylla i med hjälp av empiriska mätningar. Däremot är det annorlunda med en rent a priori disciplin som matematiken: här har vi inte tillgång till några empiriska mätinstrument. Istället tycks vad som är sant och falskt här följa med logisk nödvändighet utifrån matematiska termers betydelse, och för att få detta strikt och på en säker grund skulle vi vilja bestämma hur detta går till formellt – förslagsvis i FOL.

Eftersom vad som är matematiskt sant och falskt bör avgöras helt av de grundläggande antaganden vi gör om t.ex. de naturliga talen, de reella talen, eller mängdläran, borde vi alltså kunna kräva, om $\mathcal{T}$ är en uppsättning axiom för det matematiska område vi vill beskriva, att $\mathcal{T} \vdash P$ eller $\mathcal{T} \vdash \neg P$, för varje sats P som bara innehåller matematiska predikat (t.ex. ” $>$ ” och ” $+$ ”). Gödels ofullständighetsteorem säger emellertid att detta är omöjligt:

Teorem (Gödels ofullständighetsteorem): Varje logiskt system som innehåller Peanoaritmetiken är formellt ofullständigt.

Peanoaritmetiken (PA) är, som vi nämnt, den sedvanliga axiomatiseringen av aritmetik med de naturliga talen – en uppsättning med 7 axiom och ett axiomschema som definierar de naturliga talen samt addition och multiplikation, och som torde anses vara nödvändiga sanningar för att man skall kunna säga att man axiomatiserar just matematiken. Trots detta går Gödels ofullständighetsteorem igenom även med en del svagare system, och till och med sådana med bara ändligt många axiom.

Det går att uttrycka PA i ZFC, genom att t.ex. definiera talet 0 som $\emptyset$, och varje tal $n > 0$ som mängden av de föregående (denna definition gavs först av John von Neumann, och är den vanligaste numera). Därför är ZFC formellt ofullständigt. Gödels ofullständighetsteorem visar att vi aldrig kan ”tappa till” alla hål i matematiken, och därmed bringa den till formell fullständighet.

Bevisidén i Gödels teorem är att representera satser i FOL som tal. Genom att genomföra detta noggrant kan vi visa att det finns rent numeriska predikat (d.v.s. predikat som kan definieras helt i termer av $+$ och $\times$ i FOL) som motsvarar begrepp såsom att vara en formel, att vara en sluten sats, att vara en sekvens av satser, eller att vara ett bevis för en sats. Om $Bew(n)$ är predikatet för *bevisbarhet* så kan vi t.ex. visa att om n är talet för en sats i PA, finns det ett bevis för denna sats i PA omm $Bew(n)$ är sann.

Gödels bevis består i att betrakta satsen

(G) G går inte att bevisa i PA.

Gödel visade att det verkligen finns ett tal g för denna sats, och därför är satsen $Bew(g)$ en välformad sats i PA. Men om denna är sann (och PA inte är självmotsägande), så går $Bew(g)$

inte att bevisa, och alltså har vi $\text{Bew}(g) \rightarrow \neg\text{Bew}(g)$, eller, vilket vi kan se med lite satslogisk omflyttning, helt enkelt $\neg\text{Bew}(g)$. Men detta är precis vad satsen säger, och alltså är den sann, men inte bevisbar (att den är *sann* kan t.ex. formaliseras och visas med Tarskis sanningsbegrepp, så även detta steg går att göra formellt).

Gödels ofullständighetsteorem, som visar att matematiken inte är formellt fullständig och inte heller kan göras formellt fullständig genom att lägga till fler axiom, har fått stor betydelse för logiken och filosofin. T.ex. har den framhållits som ett ”bevis” för att människor inte är någon form av maskiner, eftersom en maskin antas följa ett formellt system och därför inte kan bevisa allt som är sant om den, medan människor inte antas ha någon sådan begränsning. Dessutom har det haft stor betydelse för diskussionen om vad *sanning* är, eftersom det begreppet enligt teoremet tycks skilja sig från *vad vi kan veta*, d.v.s. vad vi potentiellt kan bevisa i FOL. Många av dessa påståenden är emellertid tämligen ogrundade och baserar sig snarast på analogier; för en kritisk genomgång rekommenderas Torkel Franzéns bok *Gödel's Theorem. An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, som nämns i den ytterligare läsningen sist i denna föreläsning.

Olika logikers uttryckskraft

Vi har i denna kurs endast ägnat oss åt FOL och satslogik. Det finns många olika sorters logik, och de är i de flesta fall användbara till olika saker. Säg att vi har en semantik **S** för logiken $\mathcal{L}$, med en klass av modeller $\mathcal{M}$. Varje teori $\mathcal{T}$ bestämmer då en delklass av $\mathcal{M}$, nämligen de modeller vari teorin är sann. Vi säger att logiken $\mathcal{L}'$, med samma semantik **S**, är *minst lika uttrycksfull* som $\mathcal{L}$ omm alla delklasser av $\mathcal{M}$ som bestäms av någon teori i $\mathcal{L}$ också bestäms av någon teori i $\mathcal{L}'$. Informellt kan vi säga att en logik är mer uttrycksfull än en annan omm teorier uttryckta i den kan göra skillnad mellan fler modeller.

Ett viktigt exempel här är FOL: enligt Löwenheim-Skolemsatsen kan inte denna logik skilja mellan uppräkneligt och ouppräkneligt oändliga modeller. En annan följd av dess begränsning är att man i första ordningens PA inte kan visa att det inte finns något tal med oändligt många tal före sig. Eftersom detta följer från en begränsning i FOL snarare än PA, så följer det också att det inte går att lägga till axiom i PA så att detta går att bevisa: FOL kan inte uttrycka ändlighet, även om det lustigt nog kan uttrycka oändlighet.

Andra ordningens logik

Första ordningens logik tillåter oss att kvantifiera över objekt i domänen. Andra ordningens logik tillåter oss att också kvantifiera över predikat, men eftersom dessa tolkas som mängder av n -tuplar av objekt, så är detta ekvivalent med att kvantifiera över sådana mängder. För kvantifiering av enställda predikat, som i

$$\forall X (X(a) \rightarrow X(b))$$

kan vi tolka X som helt enkelt en delmängd av D . Vinner vi något genom att tillåta sådan kvantifiering? Ja: många teorier som vi bara kan beskriva med oändliga axiomscheman i FOL går att beskriva med enskilda axiom i andra ordningen logik. T.ex. kan induktionsschemat i PA skrivas som

$$\forall X ((X(0) \wedge \forall n (X(n) \rightarrow X(n + 1))) \rightarrow \forall n X(n))$$

Men detta är till och med *starkare* än induktionsschemat: som vi sade finns det modeller för första ordningens PA som har tal större än alla ändliga tal, men i andra ordningens PA har vi möjligheten att utesluta dessa.

Nackdelen med andra ordningens logik är att vi inte kan göra fullständiga härledningssystem för den. Detta följer från Gödels ofullständighetsteorem, tillsammans med satsen att andra ordningens aritmetik är formellt fullständig, d.v.s. den avgör sanningsvärdena för alla satser i sitt språk.

Lindströms teorem

Dessa resultat kopplas ihop i ett av metalogikens viktigaste teorem: *Lindströms teorem*, som bevisades av Per Lindström i Göteborg år 1969. Lindström visade att FOL är den mest uttrycksfulla logik som, förutom några triviala villkor, uppfyller Löwenheim-Skolemsatsen och kompakthetssatsen. Detta betyder att varje mer uttrycksfull logik, d.v.s. varje logik vari man kan beskriva allt man kan beskriva i FOL, och dessutom någonting mer, måste ha åtminstone en av följande egenskaper:

1. Det finns någon ouppräkneligt oändlig modell $\mathfrak{M}$ som inte gör sann samma teorier som någon uppräknligt modell.
2. Det finns någon bevisbar sats som inte kan bevisas från ett ändligt antal premisser.

Båda dessa leder emellertid till att man inte längre kan göra ett fullständigt härledningssystem för logiken i fråga. Därför kan man säga att FOL, på ett sätt, är den starkaste logik som vi kan fånga härledningar fullständigt formellt i utan att kräva att vi kan genomföra oändliga härledningar. Det är detta som ger den dess speciella betydelse.

Ytterligare läsning

Här följer några tips för den som vill sätta sig in mer i den filosofiska logiken (t.ex. över sommaren!) Alla dessa torde vara tillgängliga för någon som gått den här kursen.

Allmänt om filosofisk logik: *The Blackwell Guide to Philosophical Logic*, red. Lou Goble, Blackwell, 2001. En riktigt bra översikt över området ”filosofisk logik”, som kan fungera som en karta för den som vill lära sig hitta där.

Om mängdlära: En klassiker vad gäller hantering av mängdlära från ett filosofiskt och logiskt perspektiv är *Set Theory and Its Logic*, Willard van Quine, Belknap Press, 1969.

Om Gödels ofullständighetsteorem: En bra översikt både över det formella och över tolkningar (och feltolkningar) av teoremet är *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to its Use and Abuse*, Torkel Franzén, A K Peters Ltd, 2005.

Om filosofiska tillämpningar: Jag nöjer mig med att rekommendera min personliga favorit här: Hilary Putnam:s ”Models and Reality”, *Journal of Symbolic Logic* vol. 45, 1980. (Finns

också på nätet: http://www.princeton.edu/~hhalvors/teaching/phi520_f2012/putnam1980.pdf)
I denna text använder Putnam en version av Löwenheim-Skolemteoremet för att argumentera mot metafysisk realism.

Om framväxten av vår nuvarande logik: Mer eller mindre alla viktiga artiklar från början av 1900-talet finns i antologin *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, red. Jean van Heijenoort, Harvard University Press, 2002. En lättsammare beskrivning återfinns i seriealbumet *Logicomix: An Epic Search for Truth*, av Doxiadis och Papadimitrou, som beskriver logikens framväxt sett ur Bertrand Russells perspektiv. Perfekt som mer avslappnande komplement till Lou Goble:s bok i sommar.