

Formell logik

Kapitel 12 och 13

Robin Stenwall
Lunds universitet

Dagens föreläsning

- Informella bevismetoder för kvantifikatorer
 - Universell elimination
 - Existentiell introduktion
 - Existentiell elimination
 - Universell introduktion
 - General Conditional Proof
- Formella bevisregler för kvantifikatorer
 - $\forall$ Elim
 - $\exists$ Intro
 - $\exists$ Elim
 - $\forall$ Intro

Bevisföring med kvantifikatorer

- Vi har lärt oss vad kvantifikatorerna betyder
- Nu skall vi lära oss hur kvantifierade satser används i bevis
- Mer specifikt så kommer vi att lära oss bevismetoder som är tillräckliga för att bevisa samtliga konsekvenser som beror på meningen hos konnektiven, identitet och kvantifikatorerna.

Universell elimination

- Antag att följande generalisering är sann
(1) Alla har DNA
- Tag sedan en godtycklig person: Matthew McConaughey
- Givet att (1) är sann, så kan vi sluta oss till
(2) MM har DNA
- Varför?
- (2) är en logisk konsekvens av (1)
 - Om (1) är sann så är det omöjligt för (2) att vara falsk

Universell elimination

- Att (2) är en logisk konsekvens av (1) är bara ett exempel på en mer generell princip:
- **Principen:** Om någonting gäller för alla individer, så gäller det speciellt för en viss individ.

Dvs:

Från $\forall x S(x)$

kan vi härleda $S(c)$

förutsatt att c betecknar en individ i domänen

Universell elimination

Ett exempel

- Antag att följande är sant:

$$(3) \quad \forall x(\text{Cube}(x) \vee \text{Small}(x))$$

samt även att a och b betecknar individer i domänen

- Med hjälp av universell elimination kan då du sluta dig till:

$$(4) \quad \text{Cube}(a) \vee \text{Small}(a)$$

$$(5) \quad \text{Cube}(b) \vee \text{Small}(b)$$

Existentiell introduktion

- En av de enklaste introduktionsreglerna
- Från
 - (6) Barack Obama hälsade på påvenkan vi sluta oss till
 - (7) Någon hälsade på påven
 - (8) Barack Obama hälsade på någon
- Från
 - (9) Alla filosofer älskar David Lewiskan vi sluta oss till
 - (10) Alla filosofer älskar någon

Existentiell introduktion

- **Principen:** Om någonting gäller för en viss individ c , så finns det en individ för vilket det gäller.

Dvs:

Från $S(c)$

kan vi härleda $\exists x S(x)$

förutsatt att c betecknar en individ i domänen.

Existentiell introduktion

Ett exempel

- Antag att följande är sant:

$$(11) \text{Tet}(a) \vee \neg \text{SameSize}(a, c)$$

- Med hjälp av existentiell introduktion kan du då sluta dig till följande:

$$(12) \exists x (\text{Tet}(x) \vee \neg \text{SameSize}(x, c))$$

Existentiell introduktion

Ett potentiellt problem

- Antag att följande är sant:
(13) Tyrion Lannister finns inte
- Följer det ur (13) att:
(14) Det finns minst ett x sådant att x inte existerar?
- Nej! Tyrion Lannister betecknar inte ett objekt i vår domän.

Existentiell introduktion

Ett mer komplext exempel

- Betrakta följande argument:

$$P_1: \forall x (Tet(x) \rightarrow Small(x))$$

$$\underline{P_2: Tet(a)}$$

$$S: \exists x (Tet(x) \wedge Small(x))$$

- Med hjälp av universell elimination erhåller vi $Tet(a) \rightarrow Small(a)$ ur P_1 .
- Från $Tet(a) \rightarrow Small(a)$ och P_2 erhåller vi $Small(a)$
- Så vi har $Tet(a) \wedge Small(a)$
- Genom existentiell introduktion får vi $\exists x (Tet(x) \wedge Small(x))$

Existentiell introduktion

Övning

- Ge ett informellt bevis för följande:

$P_1: \forall x (\text{Tet}(x) \vee \text{Small}(x))$

$P_2: \neg \text{Tet}(a)$

$S: \exists x \text{Small}(x)$

Vilka regler används?

- 
- Utöver universell elimination och existentiell introduktion så finns det även mer komplexa bevisföringsmetoder som involverar kvantifikatorer.
 - Vi kommer att titta närmare på tre av dem idag:
 - Existentiell elimination
 - Universell introduktion
 - General Conditional Proof

Existentiell elimination

- Antag att du har en existentiell premiss och vill visa att någonting följer ur den
 - (14) Någonting är antingen en kub eller litet
- Antag att domänen endast innehåller två figurer a och b
 - Kan du sluta dig till att a är en kub eller liten?
 - Kan du sluta dig till att b är en kub eller liten?
- Här är en idé.
 - Vi kan från (14) sluta oss till att det finns någon figur, kalla den Groink, som antingen är en kub eller liten.
- Sen kan vi låtsas som om Groink var ett riktigt namn och se vad som följer ur det antagandet.

Existentiell elimination

Ett exempel

- Betrakta följande argument:

$P_1: \forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{Small}(x))$

$P_2: \exists x \text{Tet}(x)$

$S: \exists x \text{Small}(x)$

- Vi måste använda oss av P_2 , så låt oss testa att införa ett låtsasnamn.
- Från P_2 vet vi att det finns någon figur, kalla det d , sådant att $\text{Tet}(d)$.
- Med hjälp av universell elimination erhåller vi $\text{Tet}(d) \rightarrow \text{Small}(d)$ från P_1 .
- Så vi erhåller $\text{Small}(d)$ genom modus ponens.
- Med hjälp av existentiell introduktion får vi S .

Existentiell elimination

En observation

- I exemplet ovan introducerade vi ett låtsasnamn och sedan använde vi oss av universell elimination.
- Kan vi göra det omvända?
- Antag att vi med hjälp av universell elimination först erhåller $\text{Tet}(d) \rightarrow \text{Small}(d)$ från P_1 .
- Kan vi nu introducera ett låtsasnamn: ex. låt d vara vad som än är en tetraeder enligt P_2 ?
- Nej, själva poängen med låtsasnamn är att introducera ett helt nytt namn. Men i detta fall används d redan.
- Använd er alltid av universell elimination efter det att ni har introducerat ett låtsasnamn.

Existentiell elimination

- **Principen:** Om det finns en individ för vilken någonting gäller, så kan vi införa ett nytt namn för att beteckna den individen med och sluta oss till att den individ som namnet står för har egenskapen ifråga.

Dvs:

Från $\exists x S(x)$

kan vi sluta oss till $S(c)$

förutsatt att c är ett nytt namn som inte redan betecknar en individ.

Existentiell elimination

Ett exempel

- Betrakta följande argument:

$P_1: \forall y (\text{Cube}(y) \vee \text{Dodec}(y))$

$P_2: \forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Large}(x))$

$P_3: \exists x \neg \text{Large}(x)$

$S: \exists x \text{Dodec}(x)$

Informellt bevis: Givet P_3 kan vi genom existentiell elimination anta att $\neg \text{Large}(b)$. Ur P_2 med hjälp av universell elimination följer det att $\text{Cube}(b) \rightarrow \text{Large}(b)$. Alltså måste $\neg \text{Cube}(b)$. Men från P_1 följer det att $\text{Cube}(b) \vee \text{Dodec}(b)$. Alltså $\text{Dodec}(b)$. Ur detta följer det med hjälp av existentiell introduktion att $\exists x \text{Dodec}(x)$.

Existentiell elimination

Övning

- Ge ett informellt bevis för följande argument:

$P_1: \forall x (\text{Tet}(x) \vee \neg \text{Small}(x))$

$P_2: \forall y (\text{Tet}(y) \rightarrow \text{LeftOf}(a, y))$

$P_3: \exists x \text{Small}(x)$

$S: \exists x \text{LeftOf}(a, x)$

Universell introduktion

- Betrakta följande argument:

P₁: Alla som har VG i formell logik är smarta

P₂: Alla filosofistudenter har VG i formell logik

S: Alla filosofistudenter är smarta

Informellt bevis: Låt 'Quine' denotera någon (vilken som helst) av filosofistudenterna. Given andra premissen, så har Quine VG i formell logik (universell elimination). Enligt P₁, så måste Quine vara smart. Men eftersom Quine valdes ut arbiträrt, så följer det att alla filosofistudenter är smarta.

Universell introduktion

- Notera att vi inte valde ut en specifik filosofistudent
- Vår bevisföring var helt generell: den fungerar oberoende av vilken mängd entiteter den appliceras på
- Denna generalitet uppstod genom att vi introducerade ett nytt namn för att tala om ett arbiträr objekt
- Då objektet var arbiträrt utvalt och någonting gäller för det objektet så är vi rättfärdigade att dra en slutsats om samtliga objekt.

Universell introduktion

- Principen: Om någonting gäller för en godtyckligt vald individ så gäller det för alla individer.

Dvs:

Från $S(c)$

kan vi sluta oss till $\forall x S(x)$

förutsatt att c är en godtyckligt vald individ.

Universell introduktion

Ett exempel

- Betrakta följande argument:

$$P_1: \forall x \text{Tet}(x)$$

$$\underline{P_2: \forall x \text{Medium}(x)}$$

$$S: \forall x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Medium}(x))$$

- Låt 'c' denotera en godtyckligt objekt i Tarski's World
- Genom universell elimination på P_2 , så erhåller vi $\text{Medium}(c)$.
- Så vi har $\text{Tet}(c) \wedge \text{Medium}(c)$
- Men eftersom c var godtycklig så följer S.

Universell introduktion

En restriktion

- Om du vill visa $\forall xS(x)$ så kan du välja ett nytt namn 'c' och visa $S(c)$, under förutsättningen att $S(c)$ inte innehåller några namn som introducerats genom existentiell elimination efter införandet av c.
 - Utan restriktionen kan vi härleda falska slutsatser från sanna premisser (se boken)

General Conditional Proof

- I praktiken är vi dock främst intresserade av att bevisa generella påståenden av följande form:

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$

- För att bevisa detta genom universell introduktion så skulle du bevisa följande för ett arbiträrt c :

$$P(c) \rightarrow Q(c)$$

- Detta kan genomföras genom att använda GCP.
 - Antag $P(c)$ och visa att $Q(c)$ följer

General Conditional Proof

- **Principen:** Antag att vi vill visa att alla saker av en viss typ har en viss egenskap. Det kan vi göra genom att låta 'c' denotera ett godtyckligt objekt av den typen och visa att c har egenskapen i fråga.

Dvs:

Om vi antar $P(c)$

och lyckas visa $Q(c)$

så kan vi sluta oss till $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
förutsatt att c är ett nytt namn som står för en
godtycklig individ.

General Conditional Proof

Några noteringar

- Anmärkning 1: GCP är en väldigt naturlig bevisregel men behövs egentligen inte givet att vi redan har introduktionsreglerna för $\rightarrow$ och $\forall$.
- I boken ses introduktionsregeln för $\forall$ som ett specialfall av GCP.
- Anmärkning 2: Om du vill visa $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ så kan du välja ett nytt namn 'c', anta $P(c)$ och sedan visa $Q(c)$, under förutsättningen att Q inte innehåller några namn som introducerades genom existentiell elimination efter antagandet $P(c)$.
 - Utan denna restriktion kan vi härleda falska slutsatser från sanna premisser (se boken)

General Conditional Proof

Ett exempel

- Betrakta följande argument:
P₁: $\forall x (\text{Small}(x) \rightarrow \neg \text{Tet}(x))$
P₂: $\forall x (\neg \text{Tet}(x) \rightarrow \text{Cube}(x))$
S: $\forall x (\text{Small}(x) \rightarrow \text{Cube}(x))$
- Låt 'a' beteckna ett arbiträrt objekt i TW
- Antag $\text{Small}(a)$ *(Mål: visa att $\text{Cube}(a)$)*
- Från P₁ följer $\text{Small}(a) \rightarrow \neg \text{Tet}(a)$
- Genom modus ponens följer $\neg \text{Tet}(a)$
- P₂ ger oss $\neg \text{Tet}(a) \rightarrow \text{Cube}(a)$ och därmed $\text{Cube}(a)$
- Då a var godtycklig följer S.

General Conditional Proof

Övning

- Ge ett informellt bevis för följande argument:

$P_1: \forall x ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Large}(x)) \vee (\text{Medium}(x) \wedge \text{Tet}(x)))$

$P_2: \forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \neg \text{Smaller}(x, c))$

$S: \forall x (\text{Medium}(x) \rightarrow \neg \text{Smaller}(x, c))$

$\forall$ Elim

- Ok, nu är det dags att lära sig de formella bevisreglerna för kvantifikatorer. Vi börjar med en lätt:

$\forall x S(x)$

.

.

.

$S(c)$

Exempel

1. $\forall x (Tet(x) \wedge Small(x))$

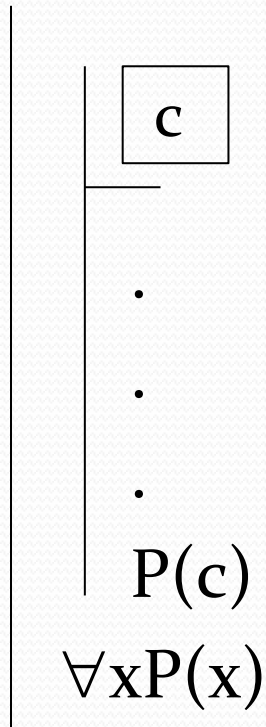
2. $Tet(c) \wedge Small(c)$ $\forall$ Elim 1

$\forall$ Intro

- Det fanns två informella metoder för att bevisa ett generellt påstående
 - Universell introduktion
 - General Conditional Proof
- Vi kommer att titta på versioner av $\forall$ Intro, en för varje informell metod.

∀ Intro

Version 1

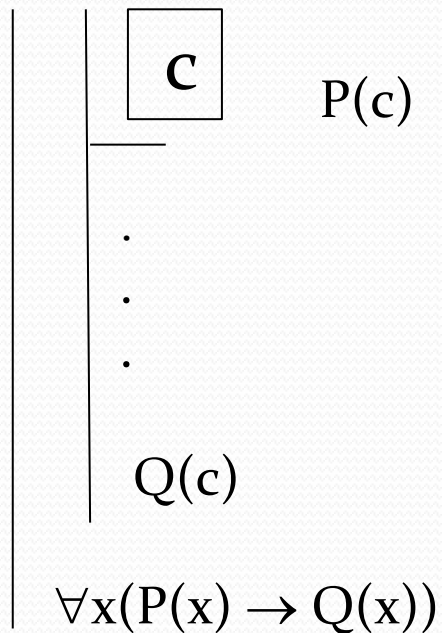


c får inte figurera utanför det subbevis där det introducerades, då c måste vara godtycklig.

Lådan med c läses som *låt c vara ett arbiträrt objekt i domänen.*

∀ Intro

Version 2



där c inte
förekommer
utanför det
subbevis där c
introducerades

$\exists$ Intro

$S(c)$

.

.

.

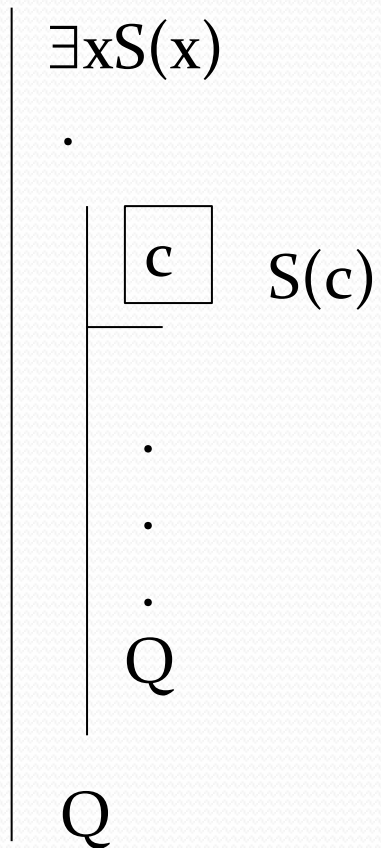
$\exists xS(x)$

Exempel

1. $Tet(c)$

2. $\exists xTet(x)$ $\exists$ Elim 1

$\exists$ Elim



Där c inte
förekommer
utanför det
subbevis där det
introducerades