

Formell logik

Kapitel 1 och 2

Robin Stenwall
Lunds universitet

Kapitel 1: Atomära satser

- Drömmen om ett perfekt språk fritt från vardagsspråkets mångtydighet och vaghet (jmf Leibniz, Russell, Wittgenstein, Carnap, ...)
- Ytterligare krav på ett perfekt språk:
 - I det perfekta språket överensstämmer satsens struktur med strukturen hos den därmed uttryckta tanken
 - Det perfekta språket ska vara tillräckligt kraftfullt för att kunna uttrycka alla vetenskapliga sanningar
- Vi ska definiera ett språk som approximerar detta ideal
- FOL = Language of First Order Logic (Första ordningens språk)

- Vi ska beskriva FOL stegvis genom att införa allt fler syntaktiska element. Först i kapitel 9 blir vi helt klara med språkbeskrivningen.
- FOL är egentligen en *språkfamilj*
- Språken i FOL har:
 - Samma grammatik
 - Samma grundvokabulär
- Språken i FOL kan variera när det gäller den vokabulär som används för att bilda de *atomära satserna*

- Atomära satser i FOL svarar mot enkla satser i vardagsspråk såsom "Kalle springer", "Stina är gift med Oskar", ...
- Atomära satser uttrycker enkla sakförhållandet: att någonting har en viss egenskap eller att flera objekt står i en viss relation till varandra
- De atomära satserna i FOL är uppbyggda av individkonstanter och *predikatsymboler*

Avsnitt 1.1: Individkonstanter (namn)

- Individkonstanter i FOL svarar mot namn i vanligt språk
- Ibland säger vi helt enkelt "namn" istället för "individkonstant"
- Exempel på individkonstanter:
 - Små bokstäver (med eller utan index): $a, b, \dots, n_1, n_2, \dots$
 - Siffror: $1, 2, \dots$
 - Vanliga namn eller andra teckenkombinationer med liten initialbokstav: $max, john, \dots$
- För individkonstanter gäller:
 - Varje individkonstant måste benämna ett objekt som antas existera
 - Ingen individkonstant får benämna mer än ett objekt
 - Ett objekt kan ha mer än ett namn eller helt sakna namn

Avsnitt 1.2: Predikatsymboler (predikat)

- Predikatsymboler är symboler som uttrycker en egenskap hos ett objekt eller en relation mellan flera objekt
- Ibland säger vi "predikat" istället för "predikatsymbol"
- Exempel
I satsen "Kalle gillar Eva" svarar "gillar" mot en predikatsymbol i FOL. Ordet "gillar" uttrycker en relation som består mellan de *logiska subjekten* Kalle och Eva. De logiska subjekten kallas predikatsymbolens *argument*.
- En predikatsymbols ställighet (eng. arity) anger hur många argument symbolen har

- Vilken ställighet har verbet "gillar"?
- Vilken ställighet har verbet "ge"?
- I FOL använder vi ord eller andra teckenkombinationer med stor begynnelsebokstav som predikatsymboler

- Exempel

- Vi kan använda ordet Längre som en 2-ställig predikatsymbol för att uttrycka relationen "längre än"
- Vi kan använda ordet Hemma som en 1-ställig predikatsymbol för att uttrycka egenskapen att vara hemma

- Viktigt att tänka på när det gäller predikatsymboler i FOL:

- Det måste alltid stå klart vilken ställighet predikatet har
- Varje predikatsymbol måste tolkas som uttryckande en bestämd egenskap eller relation med samma ställighet som predikatsymbolen

Avsnitt 1.3: Atomära satser

- Nu kan vi säga mer precist hur en atomär sats kan se ut
- En *atomär sats* kan bildas genom att placera en n-ställig predikatsymbol framför n stycken konstantsymboler (där n kan vara vilket heltal som helst större än 0)
- Konstantsymbolerna ska separeras av kommatecken och omges av parenteser
- Exempel

Hemma(max)	(uttrycker att Max är hemma)
Längre(max, john)	(uttrycker att Max är längre än John)
- En atomär sats har alltid ett bestämt *sanningsvärde*: sant eller falskt.

- Identitetssymbolen "=" ingår i alla FOL och uttrycker alltid identitet mellan två objekt (OBS! Identitetssymbolen är en logisk symbol).
- Notation: Vi skriver "max = john" (infixnotation) och inte "=(max, john)" (prefixnotation)
- I vilken ordning namnen i atomär sats förekommer är ofta av betydelse.
Jämför:

Längre(max, john)	(uttrycker att Max är längre än John)
Längre(john, max)	(uttrycker att John är längre än Max)

Avsnitt 1.4: Allmänna första ordningens språk

- Olika första ordningens språk skiljer sig med avseende på vilka namn och predikat de innehåller (dessa är s.k. icke-logiska symboler, med undantag för identitetssymbolen som är en logisk symbol).
- Översättning (formalisering)
 - Med fördefinierat FOL (se programmet Tarski's World)
 - Med egendefinierat FOL
- Vid översättning till egendefinierat FOL finns det ofta många olika sätt att gå tillväga

- Övning
Översätt meningen "Pelle ger Fido till Lena" till första ordningens språk
- Lösning 1: Definiera språket L1 på följande sätt:
Konstantsymboler: pelle, lena
Predikatsymboler: GeFido (2-ställig)
Resultat: GeFido(pelle, lena)
- Lösning 2: Definiera språket L2 enligt följande:
Konstantsymboler: pelle, lena, fido
Predikatsymboler: Ge (3-ställig)
Resultat: Ge(pelle, fido, lena)
- Hur ska vi översätta "Pelle ger Misse till Lena"?
Tumregel: När vi väljer predikatsymboler försöker vi vara ekonomiska.
Vi föredrar alltså sådana som är relativt flexibla.

Avsnitt 1.5: Funktionssymboler

- Vid sidan av namn och predikat kan ett första ordningens språk innehålla *funktionssymboler*
- En *term* är någonting som refererar till ett objekt
- Individkonstanter (namn) är termer
- Funktionssymboler gör det möjligt att bilda nya, komplexa termer, givet de termer vi redan har
- Exempel
far(john) kan användas för att beteckna Johns far

- Vilken individ betecknas av $\text{far}(\text{far}(\text{far}(\text{john})))$?
- Vilken individ betecknas av $\text{mor}(\text{far}(\text{john}))$?
- Vilken individ betecknas av $\text{far}(\text{mor}(\text{john}))$?
- I FOL skrivs funktioner med liten begynnelsebokstav för att skilja dem från predikat

- En term som bildats med hjälp av funktionssymboler kan användas precis som ett namn för att bilda atomära satser
- Vad betyder $\text{Längre}(\text{far}(\text{max}), \text{max})$?
- Att observera:
 - Predikatsymboler kombineras med namn (konstantsymboler) för att bilda *atomära satser* (vilka har ett sanningsvärde)
 - Funktionssymboler kombineras med namn för att bilda nya *termer* (vilka saknar ett sanningsvärde)
- Vilka av följande uttryck är atomära satser i FOL?
 - (A) $\text{Längre}(\text{Längre}(\text{max}, \text{john}))$
 - (B) $\text{Längre}(\text{max}, \text{far}(\text{mor}(\text{john})))$
 - (C) $\text{far}(\text{max}, \text{Längre}(\text{john}, \text{max}))$
 - (D) $\text{Hemma}(\text{far}(\text{far}(\text{far}(\text{john}))))$

- Funktionssymboler kan också ha olika ställighet beroende på hur många argument de har
- Exempel: Vi kan introducera följande 2-ställiga funktionssymboler: $\text{summan}(3, 5)$, $\text{produkten}(3, 5)$
- De flesta flerställiga funktionssymboler är av matematisk natur
- Notation: Om vi behöver ett FOL för att uttrycka addition, så använder vi normalt $+$ -tecknet och skriver $3+5$ istället för $\text{summan}(3, 5)$, osv
- Att observera: varje komplex term (uppbyggd med hjälp av funktionssymboler) antas beteckna exakt ett objekt

Kapitel 2: De atomära satsernas logik

- I det här kapitlet ska studeras huvudsakligen logiska relationer mellan atomära satser
- Argument på *Fitch-format* (efter logikern Frederic Fitch)

Alla rika skådespelare är bra skådespelare

Brad Pitt är en rik skådespelare

Brad Pitt är en bra skådespelare

Avsnitt 2.2: Bevismetoder

- Hur kan vi visa att en slutsats faktiskt följer av en mängd premisser?
- Logikerns svar: genom att konstruera ett bevis
- Vad är ett bevis?
- Logikerns svar: ett bevis är en följd av satser där varje sats är antingen en premiss eller en logisk följd av tidigare satser
- I ett *informellt bevis* är normalt inte alla stegen angivna
- I ett *formellt bevis* är alla stegen i beviset angivna tillsammans med en angivelse i enlighet med vilken logisk princip stegen kan berättigas

Bevis som involverar identitetssymbolen

- Bevisregel: Om $b = c$ så är allt som är sant om b också sant om c
- Denna regel kallas traditionellt "indiscernibility of identicals"
- Vi kallar den *identitetselimination*. (Varför?)

- Exempel

Med hjälp av denna princip kan vi i matematiken gå från

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

och

$$x^2 > x^2 - 1$$

till

$$x^2 > (x-1)(x+1)$$

- Formell regel:

$$\begin{array}{l} P(n) \\ n=m \\ P(m) \end{array}$$

- Här är
 $P(n)$ en sats som innehåller termen n
 $P(m)$ resultatet av att byta ut några eller alla förekomster av n mot termen m i $P(n)$

- Anmärkningar
 - Det spelar ingen roll vilken av $P(n)$ eller $n = m$ som förekommer först i beviset så länge som båda kommer före $P(m)$
 - Varken $P(n)$ eller $n = m$ behöver förekomma först i bevis som involverar identitetssymbolen

- Den andra regeln för identitet:

Vi kan när som helst i ett bevis säga att $n = n$ (där n är en term)

- Detta kallar vi *identitetsintroduktion* ("*Reflexivity of Identity*")

- Vi har kommit till vårt första lilla formella bevis!

- Övning

Visa att identitetsrelation är symmetrisk genom att anta $a = b$ som premiss och visa $b = a$

1. $a = b$	
2. $a = a$	= Intro
3. $b = a$	= Elim: 1, 2