

Formell logik

Kapitel 10 och 11 (forts.)

Robin Stenwall
Lunds universitet

Avsnitt 10.3 Några nyttiga ekvivalenser

- Två sätt att använda tautologa ekvivalenser i första-ordningens logik

(1) Satser vars sanningsfunktionella former är tautologt ekvivalenta är FO-ekvivalenta.

Exempel: Följande satser är FO-ekvivalenta

$$\neg(\exists x \text{ Cube}(x) \wedge \forall y \text{ Dodec}(y))$$

$$\neg\exists x \text{ Cube}(x) \vee \neg\forall y \text{ Dodec}(y)$$

(2) Men vi kan även använda DeMorgans lagar och andra tautologa ekvivalenser inuti formler.

Exempel: Följande satser är FO-ekvivalenta:

$$\forall x(\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Small}(x))$$

$$\forall x(\neg \text{Small}(x) \rightarrow \neg \text{Cube}(x))$$

Notera att de wffs som binds av kvantifikatorerna kommer att satisfieras av exakt samma objekt i varje möjlig situation.

Avsnitt 11.7 Prenex normalform

- Det är ibland bekvämare att hantera formler där samtliga kvantifikatorer har flyttats till början av uttrycket. Dessa typer av formler sägs vara i prenex normalform.
- Definition: En formel är i prenex normalform om den antingen saknar kvantifikatorer eller samtliga kvantifikatorer står i början av formeln, dvs om den har följande form:

$$K_1x_1 K_2x_2, \dots K_nx_n B$$

där $K_i (i = 1, \dots, n)$ är antingen $\forall$ eller $\exists$ och formeln B är fri från kvantifikatorer.

OBS! En formel utan kvantifikatorer betraktas som ett trivialt fall av en formel i prenex normalform.

- Övning: vilka av följande uttryck står i prenex normalform?

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

$$\forall x \forall y \neg (P(x) \rightarrow Q(y))$$

$$\forall x \exists y R(x, y)$$

$$R(x, y)$$

$$\neg \forall x R(x, y)$$

En algoritm för prenex normalform

- Alla satser är logiskt ekvivalenta med någon sats i prenex normalform. För att omvandla en sats (vilken som helst) till prenex normalform använder vi oss av följande steg:
 - 1. Eliminera samtliga förekomster av $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$ från formeln ifråga.
 - 2. Flytta alla negationstecken inåt i formeln så att de bara figurerar i literaler (alltså satser som antingen är atomära eller negerade atomära satser).
 - 3. Om nödvändigt skriv om formeln så att inte två kvantifikatorer binder samma variabler och så att ingen variabel har både fria och bundna förekomster.
 - 4. Vi erhåller nu en formel i prenex normalform genom att flytta samtliga kvantifikatorer till början av formeln.

Steg 1.

- Använd er av följande ekvivalenser när ni eliminerar förekomsterna av $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$:

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

Steg 2.

- Använd er av följande ekvivalenser när ni flyttar negations-tecken inåt i en formel:
- DeMorgans lagar
 - $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
 - $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
 - $\neg\neg P \Leftrightarrow P$
- DeMorgans lagar för kvantifikatorer
 - $\neg\forall xP(x) \Leftrightarrow \exists x\neg P(x)$
 - $\neg\exists xP(x) \Leftrightarrow \forall x\neg P(x)$

Steg 3.

- Använd er av följande resultat när ni standardiserar isär variablerna:
 - För vilken wff $P(x)$ som helst och variabel y sådan att y inte figurerar i $P(x)$ gäller följande:
 - $\forall xP(x) \Leftrightarrow \forall yP(y)$
 - $\exists xP(x) \Leftrightarrow \exists yP(y)$

- Övning: standardisera isär samtliga variabler i följande formel:

- $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists xQ(x) \wedge \exists zP(z) \wedge \exists z(Q(z) \rightarrow R(x))$

- Lösning: Ersätt x med y i $\forall x$, x med u i $\exists x$ och z med w i $\exists zP(z)$ för att erhålla:

- $\forall y(P(y) \rightarrow Q(y)) \wedge \exists uQ(u) \wedge \exists wP(w) \wedge \exists z(Q(z) \rightarrow R(x))$

Steg 4.

- Använd er av följande ekvivalenser när ni flyttar kvantifikatorerna till början av formeln:
 - För varje FO-formel P i vilken x inte är fri gäller:
 - $\forall x P \Leftrightarrow P$
 - $\exists x P \Leftrightarrow P$
 - $P \wedge \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x (P \wedge Q(x))$
 - $P \wedge \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x (P \wedge Q(x))$
 - $P \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x (P \vee Q(x))$
 - $P \vee \forall x Q(x) \Leftrightarrow \forall x (P \vee Q(x))$

Kvantifiering på tomgång (eng. *null quantification*)

- När vi definierade wffs så krävde vi inte att den variabel som vi kvantifierade över är fri (eller förekommer överhuvudtaget) i den formel som kvantifikatorn appliceras på.
- Exempelvis är $\forall x \text{Cube}(b)$ en wff även om $\text{Cube}(b)$ inte innehåller den fria variabeln x .
- Betrakta då $\forall x \text{Cube}(b)$. Denna sats kommer ut som sann i en värld om och endast om all objekt inom domänen satisfierar formeln $\text{Cube}(b)$. Men vad betyder detta?
- Om du ersätter varje förekomst av x i $\text{Cube}(b)$ med namnet n_1 , så kommer resultatet att vara $\text{Cube}(b)$. Så frågan om något objekt satisfierar $\text{Cube}(b)$ är samma sak som att fråga om $\text{Cube}(b)$ är sann. Därmed kommer $\forall x \text{Cube}(b)$ och $\text{Cube}(b)$ att vara sanna i exakt samma världar—de är m.a.o. logiskt ekvivalenta.

Några andra nyttiga ekvivalenser i steg 4.

- $\forall xP(x) \wedge \forall xB(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge Q(x))$
- $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \vee Q(x))$
 - OBS! $\forall xP(x) \vee \forall xB(x)$ är inte logiskt ekvivalent med $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ och $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ är inte ekvivalent med $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.
- $\forall x\forall yP(x, y) \Leftrightarrow \forall y\forall xP(x, y)$
- $\exists x\exists yP(x, y) \Leftrightarrow \exists y\exists xP(x, y)$
- $K_1xP(x) \wedge K_2yQ(y) \Leftrightarrow K_1xK_2y(P(x) \wedge Q(y))$
- $K_1xP(x) \vee K_2yQ(y) \Leftrightarrow K_1xK_2y(P(x) \vee Q(y))$, där K_1 och K_2 är antingen $\forall$ eller $\exists$.

Exempelvis om $K_1 = \forall$ och $K_2 = \exists$, så är $\forall xP(x) \wedge \exists yQ(y) \Leftrightarrow \forall x\exists y(P(x) \wedge Q(y))$.

Ett exempel

- **Hitta prenex normalformen för:**
 - $\forall x((\exists yR(x, y) \wedge \forall y\neg S(x, y)) \rightarrow \neg(\exists yR(x, y) \wedge P))$
 - Enligt steg 1. måste vi eliminera $\rightarrow$
 - $\forall x(\neg(\exists yR(x, y) \wedge \forall y\neg S(x, y)) \vee \neg(\exists yR(x, y) \wedge P))$
 - Enligt steg 2. måste vi flytta negationstecknet inåt
 - $\forall x(\forall y\neg R(x, y) \vee \exists yS(x, y) \vee \forall y\neg R(x, y) \vee \neg P)$
 - I steg 3. standardiserar vi isär variablerna
 - $\forall x(\forall y_1\neg R(x, y_1) \vee \exists y_2S(x, y_2) \vee \forall y_3\neg R(x, y_3) \vee \neg P)$
 - I steg 4. flyttar vi samtliga kvantifikatorer till början av formeln
 - $\forall x\forall y_1\exists y_2\forall y_3(\neg R(x, y_1) \vee S(x, y_2) \vee \neg R(x, y_3) \vee \neg P)$

Övningar

- Ändra följande satser till prenex normalform:
- $\exists x P(x) \rightarrow \exists y Q(y)$
- $(\exists x P(x) \vee R(b)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge \forall x Q(x))$
- $\forall x [(C(x) \wedge \exists y (T(y) \wedge L(x, y))) \rightarrow \exists y (D(y) \wedge B(x, y))]$

Kom ihåg att varje steg i serien måste vara logiskt ekvivalent