Filosofisk logik
Kapitel 14

Robin Stenwall
Lunds universitet

Avsnitt 14.1
Numerisk kvantifikation

- Kvantifikatorerna i FOL är begränsade till ∀ och ∃.
- Detta innebär att vi kan uttrycka satser som säger någonting om *allting* och *någonting*.
- Med hjälp av konnektiven och bägge kvantifikatorerna så kan vi även uttrycka sådant som:

Ingenting är …	$\forall x \neg \ldots (\neg \exists x \ldots)$
Alla kuber är …	$\forall x\, (\mathrm{Cube}(x) \to \ldots$
Någon kub är …	$\exists x\, (\mathrm{Cube}(x) \land \ldots$

Numerisk kvantifikation

- I avsnitt 14.1. ser vi hur vi med hjälp av FOL även kan uttrycka numeriskt kvantifierande satser av typen:

  Det finns minst tre kuber

  Det finns högst fyra tetraeder

  Det finns exakt en kub,… etc.

- Märk väl att vi redan vet hur vi skall uttrycka att det finns minst ett ting av någonting: ex. *det finns minst en stor kub*.

  $\exists x(\text{Cube}(x) \wedge \text{Large}(x))$

Numerisk kvantifikation
Minst två

- Antag att vi vill uttrycka att det finns minst två kuber i FOL
- Funkar $\exists x \exists y(\mathrm{Cube}(x) \wedge \mathrm{Cube}(y))$?
- Nej! Ingenting i FOL säger oss att x och y måste vara olika kuber.
- Vad vi behöver är någonting som garanterar att x och y är olika objekt.

$$\exists x \exists y(\mathrm{Cube}(x) \wedge \mathrm{Cube}(y) \wedge x \neq y)$$

- Vad uttrycker $\exists x \exists y\ x \neq y$?
- Svar: det finns minst två ting

Numerisk kvantifikation

Högst en

- Att uttrycka *det finns högst en kub* i FOL är mer komplicerat.
- Tänk er en låda som innehåller både kuber och tetraeder. Låt oss även anta att lådan innehåller högst en kub.
- Antag vidare att du sätter in handen i lådan och tar ut en kub för att sedan placera den tillbaka. Sedan sätter du åter in handen i lådan och tar ut en kub. Vi vet nu att sedan det finns *högs*t en kub i lådan så måste detta vara samma kub som i första fallet.
- Detta är den bokomliggande principen till hur vi uttrycker *det finns högst n* av någonting (i detta fall är n = 1):

$$\forall x \forall y\ ((\mathrm{Cube}(x) \land \mathrm{Cube}(y)) \rightarrow x = y)$$

- Vad uttrycker $\forall x \forall y\ x = y$?
- Svar: det finns högst ett ting

Numerisk kvantifikation

Exakt en

- Hur skall vi då uttrycka att det finns exakt en kub?
- Det betyder ju samma sak som att det finns minst en kub och det finns högst en kub. Alltså:

  $$\exists x\, Cube(x) \land \forall x \forall y\, ((Cube(x) \land Cube(y)) \rightarrow x = y)$$

- Ett enklare sätt att uttrycka samma sak är:

  $$\exists x\, (Cube(x) \land \forall y\, (Cube(y) \rightarrow x = y))$$

- Eller ännu enklare:

  $$\exists x \forall y (Cube(y) \leftrightarrow y = x)$$

- Vad uttrycker $\exists x \forall y\ x = y$?
- Svar: det finns exakt ett ting

Numerisk kvantifikation
Minst tre

- Att uttrycka att det finns minst två av någonting i FOL krävde användningen av två ∃ och en ≠.
- Hur skall vi då uttrycka att det finns minst tre av någonting?
- Svar: vi behöver tre ∃ och tre ≠.
- Det finns minst tre kuber blir då:

$$\exists x \exists y \exists z\, (Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge Cube(z) \wedge x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$$

- Hur skulle vi uttrycka att det finns minst tre ting?
- Svar: $\exists x \exists y \exists z\, (x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$

Numerisk kvantifikation

Högst två

- Tänk er åter lådan med de platonska kropparna.
- Om det finns högst två kuber i lådan betyder detta att om du vid tre tillfällen tar ut en kropp och placerar den tillbaka och att det varje gång är en kub, så måste du ha tagit ut samma kub mer än en gång.
- Detta är den bokomliggande principen till hur vi uttrycker *det finns högst n* av någonting (i detta fall är n = 2):

$$\forall x \forall y \forall z((\mathrm{Cube}(x) \land \mathrm{Cube}(y) \land \mathrm{Cube}(z)) \rightarrow (x = y \lor x = z \lor y = z))$$

- Hur skulle vi uttrycka att det finns högst två ting?
- Svar: $\forall x \forall y \forall z\ (x = y \lor x = z \lor y = z)$

Numerisk kvantifikation
Exakt två

- Hur skulle vi uttrycka att det finns exakt två kuber?
- En möjlighet är att vi helt enkelt slår samman *det finns minst två kuber* med *det finns högst två kuber*
- Ett enklare sätt att uttrycka samma sak är:
  $\exists x \exists y\ (Cube(x) \land Cube(y) \land x \neq y \land \forall z\ (Cube(z)) \rightarrow (x = z \lor y = z))$
- Eller ännu enklare:
  $\exists x \exists y\ ((x \neq y \land \forall z\ (Cube(z) \leftrightarrow (x = z \lor y = z))$
- Hur skulle vi uttrycka att det finns exakt två ting?
- Svar: $\exists x \exists y\ (x \neq y \land \forall z\ (x = z \lor y = z))$

Bekväma förkortningar

- Numerisk kvantifikation uttryckt i FOL blir ofta väldigt komplicerade.
- Därför har följande förkortningar etablerats:

$\exists^{\geq n}xP(x)$ ”minst n objekt satisfierar P(x)”

$\exists^{\leq n}xP(x)$ ”högst n objekt satisfierar P(x)”

$\exists^{!n}xP(x)$ ”exakt n objekt satisfierar P(x)”

OBS! ”Exakt *ett* objekt satisfierar P(x)” uttrycks $\exists!xP(x)$ (snarare än $\exists^{!1}xP(x)$).

Avsnitt 14. 3
Bestämda beskrivningar

- Med bestämda beskrivningar avser vi satser som:

  Den längsta personen i laget

  Den nuvarande kungen av Frankrike

  Första personen in rymden

  Den kändaste byggnaden i Paris

  USA:s 45e president

- Märk väl att bestämda beskrivningar fungerar **syntaktiskt** som namn.

Bestämda beskrivningar

- Kalle har rött hår
- Den längsta personen i laget har rött hår

- Donald Trump är republikan
- USA:s 45e president är republikan

- Ovanstående satser är i subjekt-predikat form

Bestämda beskrivningar

- Det finns dock goda skäl att bestämda beskrivningar inte fungerar rent **semantiskt** som namn.
- Bestämda beskrivning fungerar inte som individkonstanter.
- Vore de individkonstanter så skulle bägge nedanstående argument vara giltiga

P: <u>Kalle har rött hår</u>

S: Någon person i laget har rött hår

P*: <u>Den längsta personen i laget har rött hår</u>

S*: Någon person i laget har rött hår

Bestämda beskrivningar

- Det andra argumentet är giltigt och det första är ogiltigt (då ingenting i det första argumentet säger att Kalle är en person i laget).
- Vi bör alltså inte behandla bestämda beskrivningar som om de vore namn.
- **Problem**: Logiken kan inte garantera att en bestämd beskrivning lyckas med att plocka ut en bestämd individ.
- Hur skulle du exempelvis utvärdera satsen *kuben är liten* i TW?
- Du skulle väl förvänta dig att det finns exakt en kub och om den är liten så är satsen sann—om inte, så är den falsk.

Bestämda beskrivningar

- Men vad händer i en värld där (i) det inte finns någon kub eller (ii) det finns två kuber, varav endast en är liten?
- Är satsen *kuben är liten* sann i en sådan värld?
- Någonting verkar ha gått snett.
- Låt F:et (kuben, den nuvarande kungen av Frankrike etc.) vara en lyckad beskrivning om det finns exakt ett F, och en misslyckad beskrivning i de övriga fallen.
- Hur skall vi hantera sådana bestämda beskrivningar som misslyckas'?
- Bertrand Russell kom på en briljant lösning.

Bertrand Russell om bestämda beskrivningar

- Enligt Russell kan en bestämd beskrivning förstås som en konjunktion med tre konjunkter.
- Betrakta följande sats

  (1) Den nuvarande kungen av Frankrike är skallig

- Enligt Russell består denna sats av följande konjunkter:

  (1*) <u>Det finns minst en nuvarande kung av Frankrike</u> *och* <u>det finns högst en nuvarande kung av Frankrike</u> *och* <u>alla nuvarande kungar av Frankrike är skalliga</u>

Bertrand Russell om bestämda beskrivningar

- Detta kan uttryckas i FOL som:

$$(1^{**})\ \exists x\, NKF(x) \wedge$$
$$\forall x \forall y\, ((NKF(x) \wedge NKF(y)) \rightarrow y = x) \wedge$$
$$\forall x\, (NKF(x) \rightarrow Skallig(x))$$

- Det är nu lätt att se att denna sats kan vara falsk på tre olika sätt beroende på vilken konjunkt som är falsk.
  - Det finns ingen nuvarande kung av Frankrike (1:a falsk)
  - Det finns fler än en nuvarande kung av Frankrike (2:a falsk)
  - Det finns någon nuvarande kung av Frankrike som inte är skallig (3:e falsk)

Bertrand Russell om bestämda beskrivningar

- Ett enklare sätt att uttrycka (1**) på är (*används i LPL*):

  (1***) $\exists x\,(NKF(x) \wedge \forall y\,(NKF(y) \rightarrow y = x) \wedge Skallig(x))$

- Eller ännu enklare uttryckt:

  (1****) $\exists x \forall y\,((NKF(y) \leftrightarrow y = x) \wedge Skallig(x))$

- (1**), (1***) och (1****) är logiskt ekvivalenta

Bertrand Russell om bestämda beskrivningar

- Två saker att notera angående Russells bestämda beskrivningar:
  - (A) Den tillskriver ett definitivt sanningsvärde till samtliga bestämda beskrivningar även i de fall då beskrivningen inte är ’lyckad’.
  - (B) Även om en sats är entydig kan introduktionen av en logisk operation göra satsen mångtydig.
  - Betrakta följande Russell-analys av satsen *kuben är liten*:

$$(2)\ \exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \wedge \forall y\ (\mathrm{Cube}(y) \rightarrow y = x) \wedge \mathrm{Small}(x))$$

Bertrand Russell om bestämda beskrivningar

- Vad händer om vi negerar satsen ”kuben är liten” (dvs *det är inte så att kuben är liten*)?
- Enligt Russell är den satsen mångtydig
- Den kan antigen betyda

$$(2^*)\ \exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \land \forall y\ (\mathrm{Cube}(y) \to y = x) \land \neg \mathrm{Small}(x))$$

- Eller så kan den betyda

$$(2^{**})\ \neg\exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \land \forall y\ (\mathrm{Cube}(y) \to y = x) \land \mathrm{Small}(x))$$

Bertrand Russell om bestämda beskrivningar

- (2*) säger att det finns exakt en kub och att den inte är liten.
- (2**) säger någonting annat, nämligen att det inte är fallet att det både finns exakt en kub och att den är liten.
- Notera att (2*) och (2**) kommer att skilja sig i sanningsvärde beroende på hur världen är (ex. i världar där det inte finns någon kub eller fler än en kub).

Strawsons analys av bestämda beskrivningar

- Russell lyckades inte övertyga alla (ex. Peter Frederick Strawson)
- Enligt Strawson är det ett misstag att tro att någon som säger att *kuben är liten* därmed påstår tre saker: (i) att det finns minst en kub; (ii) att det finns högst en kub och (iii) att alla kuber är små.
- Det är snarare så att personen ifråga inte lyckas påstå någonting överhuvudtaget om det inte finns exakt en kub.
- Att det finns exakt en kub är inte någonting som påstås, utan snarare en förutsättning för att *kuben är liten* påstår någonting överhuvudtaget.
- Ur detta följer att inte någonting har påståtts och eftersom det är påståenden som har sanningsvärden enligt Strawson, följer det även att satsen ’kuben är liten’ inte påstår någonting med ett sanningsvärde.

Övning

- Dela in er i två grupper.

- Den ena gruppen argumenterar för Russells position och den andra argumenterar för Strawsons position.

- Vilka fördelar finns det med den position ni är satt att försvara?

Strawsons analys av bestämda beskrivningar

- En konsekvens av Strawsons analys är att en sats som *kuben är liten* inte kan översättas till FOL (alla satser i FOL har ju ett sanningsvärde).

- Därmed bör vi enligt Strawson hantera bestämda beskrivningar som FOL hanterar namn: nämligen att formler där namn figurerar endast kan erhålla ett sanningsvärde om de refererar till ett unikt objekt.

Problem med Strawsons teori

- Strawsons teori försvagar FOL.
- Enligt Strawson så kan vi inte med hjälp av FOL förklara varför följande argument är giltigt:

P: <u>Den stora kuben är framför b</u>

S: Någonting stort är framför b

Det är uppenbart att argumentet är giltigt (Strawson skulle hålla med), men S är inte en FO-konsekvens av P om Strawson har rätt.

Problem med Strawsons teori

- Argumentet skulle ju se ut enligt följande:

  P: Framför(den stora kuben, b)

  S: $\exists x\,(Stor(x) \wedge Framför(x, b))$

- Det är uppenbart att S inte är en FO-konsekvens av P.

- Enligt Russell skulle samma argument översättas enligt följande:

  P: $\exists x \forall y(((Stor(y) \wedge Kub(y)) \leftrightarrow y = x) \wedge Framför(x, b))$

  S: $\exists x\,(Stor(x) \wedge Framför(x, b))$

- Här är S är en direkt FO-konsekvens av P.

En annan lösning

- För att åter stärka FOL så kan vi introducera en alternativ teori rörande de förutsättningar som våra uttalanden bär med sig.
- En sådan lösning skulle vara att säga att ’förutsättningarna’ är konversationella implikaturer.
- Enligt Strawson förutsätter satsen *det är inte så att kuben är liten* att det finns exakt en kub. Om inte denna förutsättning råder så påstår den som uttalar satsen ingenting som kan vara sant eller falskt.

En annan lösning

- Men tänk om det bara är en implikatur att det finns exakt en kub. Då kan ju satsen fortfarande ha ett sanningsvärde även när implikaturen är falsk.
- Låt oss testa detta: Kan vi säga att *det är inte så att kuben är liten* och förneka att *det finns exakt en kub* utan att motsäga oss?
- Åsikterna går isär.
- Min personliga åsikt är att det inte är en motsägelse.
- Det är ungefär som att säga till min dotter som frågar mig om det var monstret under sängen som jamade.

Nej, det var inte monstret under sängen som jamade, det var katten. Faktum är att det inte finns något monster under sängen.

<u>Detta är ju sant, och därmed inte en kontradiktion</u>