# Formell logik
# Kapitel 11

Robin Stenwall
Lunds universitet

# Kapitel 11: Satser med flera kvantifikatorer

- I kapitel 9 och 10 fokuserade vi på satser som innehåller en kvantifikator
- Det var tillräckligt för att uttrycka de fyra aristoteliska satsformerna
- Många vardagsspråkliga yttranden innehåller dock flera kvantifikatorer
- Exempel: ”Alla gillar någon”

# Avsnitt 11.1 Satser med flera kvantifikatorer av samma sort

- Vad säger följande satser?

$$\exists x\ \exists y\ [Cube(x) \wedge Tet(y) \wedge LeftOf(x, y)]$$

$$\forall x\ \forall y\ [(Cube(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow LeftOf(x, y)]$$

## *Om bruket av olika variabler*

- Vad säger följande satser?

$$\forall x\ \forall y\ [(Cube(x) \land Cube(y)) \rightarrow (LeftOf(x, y) \lor RightOf(x, y))]$$

$$\forall x\ \forall y\ [(Cube(x) \land Cube(y) \land x \neq y) \rightarrow (LeftOf(x, y) \lor RightOf(x, y))]$$

- Varning: att variablerna är olika betyder inte att de objekt de kan ta som värden måste vara olika

# Avsnitt 11.2: Blandade kvantifikatorer

- Exempel på satser med flera olika kvantifikatorer:

  $\forall x \exists y\ Gillar(x, y)$

  $\forall x\ [Cube(x) \rightarrow \exists y\ (Tet(y) \wedge LeftOf(x, y))]$

*Om kvantifikatorernas ordning*

- Antag att vi har flera kvantifikatorer direkt efter varandra i en sats
- Kvantifikatorernas ordning spelar ingen roll när alla är av samma sort
- Exempel

$\forall x\ \forall y\ Gillar(x, y) \Leftrightarrow \forall y\ \forall x\ Gillar(x, y)$

$\exists x\ \exists y\ Gillar(x, y) \Leftrightarrow \exists y\ \exists x\ Gillar(x, y)$

- Men betrakta följande satser:

$\forall x \, \exists y \, Gillar(x, y)$ (”Alla gillar någon”)

$\forall x \, \exists y \, Gillar(y, x)$ (”Alla gillas av någon”)

$\exists x \, \forall y \, Gillar(x, y)$ (”Någon gillar alla”)

$\exists x \, \forall y \, Gillar(y, x)$ (”Någon gillas av alla”)

- Alltså: Om kvantifikatorerna är av olika sort, kan deras ordning vara högst väsentlig

- Med hjälp av blandade kvantifikatorer kan vi uttrycka att det finns *exakt ett* objekt av en viss typ

- Exempel: Hur ska vi uttrycka att det finns exakt en kub?

”Det finns någonting, x, som är en kub och, för alla y, om y är en kub så är y identisk med x”

Formel:

$$\exists x\ (Cube(x) \wedge \forall y\ (Cube(y) \rightarrow y = x))$$

# Avsnitt 11.3: Översättning steg för steg

Exempel: Översätt: ”Varje kub befinner sig till vänster om en tetraeder” till FOL

Steg 1: Vi noterar att satser säger någonting om alla kuber

$\forall x\ (Cube(x) \rightarrow$ x befinner sig till vänster om en tetraeder$)$

Steg 2: Översätt ”x befinner sig till vänster om en tetraeder”

$\exists y\ (Tet(y) \wedge LeftOf(x, y))$

Steg 3: Kombinera!

$\forall x\ (Cube(x) \rightarrow \exists y\ (Tet(y) \wedge LeftOf(x, y)))$

Annat exempel: översätt ”Allting till höger om en stor kub är litet”

Steg 1: $\forall x$ (x är till höger om en stor kub $\rightarrow$ x är litet)

Steg 2: Vi översätter ”x är till höger om en stor kub”

$\exists y\ (Cube(y) \wedge Large(y) \wedge RightOf(x, y))$

Steg 3: Vi översätter ”x är litet”

$Small(x)$

Steg 4: Kombinera!

$\forall x(\exists y\ (Cube(y) \wedge Large(y) \wedge RightOf(x, y)) \rightarrow Small(x))$

# Avsnitt 11.4: Satser i behov av omskrivning (parafrasering)

- Översätt: ”Om en student följer en logikkurs, så måste han eller hon vara smart”

- Att tillämpa steg-för-steg-metoden direkt på denna sats leder till nonsens

- Satsen måste först skrivas om så att dess sanna logiska struktur framträder

- Resultat av omskrivning: ”Varje student som går en logikkurs är smart”

# Avsnitt 11.4: Satser i behov av omskrivning (parafrasering)

- Många satser i vardagsspråket är mångtydiga
- Satser i FOL har alltid en entydig innebörd (förutsatt att de ingående predikaten har det)
- Mångtydigheten gäller ofta kvantifikatorernas ordning
- Problem: Vilken innebörd ska man i så fall välja att översätta till FOL?
- Svaret ges oftast av sammanhanget

*Exempel (från boken)*

Jämför:

”Varje minut rånas en man i New York City. Få rapporterar rånen till polisen”

”Varje minut rånas en man i New York City. I kväll ska vi intervjua honom”

*Betydelse 1*

$\forall x\,(\text{Minut}(x) \rightarrow \exists y\,(\text{Man}(y) \wedge \text{RånasUnder}(y, x)))$

*Betydelse 2*

$\exists y\,(\text{Man}(y) \wedge \forall x\,(\text{Minut}(x) \rightarrow \text{RånasUnder}(y, x)))$

# Övningar

- Översätt följande satser till FOL:

”Någon hemul är kär i alla filifjonkor”

”Det finns exakt en stor hemul”

”Allting med ingenting bakom sig är stort”

”Alla försiktiga hemuler bor i ett stort hus”

”Ett tillräckligt villkor för att en logiklärare skall vara nöjd är att alla hens elever kan logik”