Formell logik
Kapitel 1 och 2

Robin Stenwall
Lunds universitet

Kapitel 1: Atomära satser

- Drömmen om ett perfekt språk fritt från vardagsspråkets mångtydighet och vaghet (jmf Leibniz, Russell, Wittgenstein, Carnap, …)
- Ytterligare krav på ett perfekt språk:
  - I det perfekta språket överensstämmer satsens struktur med strukturen hos den därmed uttryckta tanken
  - Det perfekta språket ska vara tillräckligt kraftfullt för att kunna uttrycka alla vetenskapliga sanningar
- Vi ska definiera ett språk som approximerar detta ideal
- FOL = Language of First Order Logic (Första ordningens språk)

- Vi ska beskriva FOL stegvis genom att införa allt fler syntaktiska element. Först i kapitel 9 blir vi helt klara med språkbeskrivningen.

- FOL är egentligen en *språkfamilj*

- Språken i FOL har:
  - Samma grammatik
  - Samma grundvokabulär

- Språken i FOL kan variera när det gäller den vokabulär som används för att bilda de *atomära satserna*

- Atomära satser i FOL svarar mot enkla satser i vardagsspråk såsom ”Kalle springer”, ”Stina är gift med Oskar”, …

- Atomära satser uttrycker enkla sakförhållandet: att någonting har en viss egenskap eller att flera objekt står i en viss relation till varandra

- De atomära satserna i FOL är uppbyggda av individkonstanter och *predikatsymboler*

Avsnitt 1.1: Individkonstanter (namn)

- Individkonstanter i FOL svarar mot namn i vanligt språk
- Ibland säger vi helt enkelt ”namn” istället för ”individkonstant”
- Exempel på individkonstanter:
  - Små bokstäver (med eller utan index): a, b, …, n_1, n_2,..
  - Siffror: 1, 2, …
  - Vanliga namn eller andra teckenkombinationer med liten initialbokstav: max, john, …,
- För individkonstanter gäller:
  - Varje individkonstant måste benämna ett objekt som antas existera
  - Ingen individkonstant får benämna mer än ett objekt
  - Ett objekt kan ha mer än ett namn eller helt sakna namn

Avsnitt 1.2: Predikatsymboler (predikat)

- Predikatsymboler är symboler som uttrycker en egenskap hos ett objekt eller en relation mellan flera objekt
- Ibland säger vi ”predikat” istället för ”predikatsymbol”
- <u>Exempel</u>

  I satsen ”Kalle gillar Eva” svarar ”gillar” mot en predikatsymbol i FOL. Ordet ”gillar” uttrycker en relation som består mellan de *logiska subjekten* Kalle och Eva. De logiska subjekten kallas predikatsymbolens *argument*.
- En predikatsymbols ställighet (eng. arity) anger hur många argument symbolen har

- Vilken ställighet har verbet ”gillar”?
- Vilken ställighet har verbet ”ge”?
- I FOL använder vi ord eller andra teckenkombinationer med stor begynnelsebokstav som predikatsymboler

- Exempel
  - Vi kan använda ordet Längre som en 2-ställig predikatsymbol för att uttrycka relationen ”längre än”
  - Vi kan använda ordet Hemma som en 1-ställig predikatsymbol för att uttrycka egenskapen att vara hemma

- Viktigt att tänka på när det gäller predikatsymboler i FOL:
  - Det måste alltid stå klart vilken ställighet predikatet har
  - Varje predikatsymbol måste tolkas som uttryckande en bestämd egenskap eller relation med samma ställighet som predikatsymbolen

Avsnitt 1.3: Atomära satser

- Nu kan vi säga mer precist hur en atomär sats kan se ut
- En *atomär sats* kan bildas genom att placera en n-ställig predikatsymbol framför n stycken konstantsymboler (där n kan vara vilket heltal som helst större än 0)
- Konstantsymbolerna ska separeras av kommatecken och omges av parenteser
- <u>Exempel</u>

  Hemma(max) (uttrycker att Max är hemma)

  Längre(max, john) (uttrycker att Max är längre än John)
- En atomär sats har alltid ett bestämt *sanningsvärde*: sant eller falskt. (Varför?)

- Identitetssymbolen ”=” ingår i alla FOL och uttrycker alltid identitet mellan två objekt (OBS! Identitetssymbolen är en logisk symbol).

- Notation: Vi skriver ”max = john” (infixnotation) och inte ”=(max, john)” (prefixnotation)

- I vilken ordning namnen i atomär sats förekommer är ofta av betydelse.

  Jämför:

Längre(max, john)	(uttrycker att Max är längre än John)
Längre(john, max)	(uttrycker att John är längre än Max)

Avsnitt 1.4: Allmänna första ordningens språk

- Olika första ordningens språk skiljer sig med avseende på vilka namn och predikat de innehåller (dessa är s.k. icke-logiska symboler, med undantag för identitetssymbolen som är en logisk symbol).

- Översättning (formalisering)
  - Med fördefinierat FOL (se programmet Tarski’ s World)
  - Med egendefinierat FOL

- Vid översättning till egendefinierat FOL finns det ofta många olika sätt att gå tillväga

- <u>Övning</u>
  Översätt meningen ”Pelle ger Fido till Lena” till första ordningens språk

- Lösning 1: Definiera språket L1 på följande sätt:
  - Konstantsymboler: pelle, lena
  - Predikatsymboler: GeFido (2-ställig)
  - Resultat: GeFido(pelle, lena)

- Lösning 2: Definiera språket L2 enligt följande:
  - Konstantsymboler: pelle, lena, fido
  - Predikatsymboler: Ge (3-ställig)
  - Resultat: Ge(pelle, fido, lena)

- Hur ska vi översätta ”Pelle ger Misse till Lena”?
  Tumregel: När vi väljer predikatsymboler försöker vi vara ekonomiska. Vi föredrar alltså sådana som är relativt flexibla.

Avsnitt 1.5: Funktionssymboler

- Vid sidan av namn och predikat kan ett första ordningens språk innehålla *funktionssymboler*
- En *term* är någonting som refererar till ett objekt
- Individkonstanter (namn) är termer
- Funktionssymboler gör det möjligt att bilda nya, komplexa termer, givet de termer vi redan har
- Exempel

  far(john) kan användas för att beteckna Johns far

- Vilken individ betecknas av far(far(far(john)))?
- Vilken individ betecknas av mor(far(john))?
- Vilken individ betecknas av far(mor(john))?
- I FOL skrivs funktioner med liten begynnelsebokstav för att skilja dem från predikat

- En term som bildats med hjälp av funktionssymboler kan användas precis som ett namn för att bilda atomära satser
- Vad betyder Längre(far(max), max)?
- Att observera:
  - Predikatsymboler kombineras med namn (konstantsymboler) för att bilda *atomära satser* (vilka har ett sanningsvärde)
  - Funktionssymboler kombineras med namn för att bilda nya *termer* (vilka saknar ett sanningsvärde)
- Vilka av följande uttryck är atomära satser i FOL?

  (A) Längre(Längre(max, john))

  (B) Längre(max, far(mor(john)))

  (C) far(max, Längre(john, max))

  (D) Hemma(far(far(far(john))))

- Funktionssymboler kan också ha olika ställighet beroende på hur många argument de har
- Exempel: Vi kan introducera följande 2-ställiga funktionssymboler: summan(3, 5), produkten(3, 5)
- De flesta flerställiga funktionssymboler är av matematisk natur
- Notation: Om vi behöver ett FOL för att uttrycka addition, så använder vi normalt +-tecknet och skriver 3+5 istället för summan(3, 5), osv
- Att observera: varje komplex term (uppbyggd med hjälp av funktionssymboler) antas beteckna exakt ett objekt

Kapitel 2: De atomära satsernas logik

- I det här kapitlet studeras huvudsakligen logiska relationer mellan atomära satser
- Argument på *Fitch-format* (efter logikern Frederic Fitch)

Alla rika skådespelare är bra skådespelare

Brad Pitt är en rik skådespelare

Brad Pitt är en bra skådespelare

Avsnitt 2.2: Bevismetoder

- Hur kan vi visa att en slutsats faktiskt följer av en mängd premisser?
- Logikerns svar: genom att konstruera ett bevis
- Vad är ett bevis?
- Logikerns svar: ett bevis är en följd av satser där varje sats är antingen en premiss eller en logisk följd av tidigare satser
- I ett *informellt bevis* är normalt inte alla stegen angivna
- I ett *formellt bevis* är alla stegen i beviset angivna tillsammans med en angivelse i enlighet med vilken logisk princip stegen kan berättigas

Bevis som involverar identitetssymbolen

- Bevisregel: Om b = c så är allt som är sant om b också sant om c

- Denna regel kallas traditionellt ”indiscernibility of identicals”

- Vi kallar den *identitetselimination*. (Varför?)

- Exempel
  Med hjälp av denna princip kan vi i matematiken gå från
  $$x^2-1 = (x-1)(x+1)$$
  och
  $$x^2 > x^2-1$$
  till
  $$x^2 > (x-1)(x+1)$$

- Formell regel:

$$\begin{array}{|l} P(n) \\ n=m \\ P(m) \end{array}$$

- Här är

  P(n) en sats som innehåller termen n

  P(m) resultatet av att byta ut några eller alla förekomster av n mot termen m i P(n)

- Anmärkningar
  - Det spelar ingen roll vilken av P(n) eller n = m som förekommer först i beviset så länge som båda kommer före P(m)

- Den andra regeln för identitet:

  Vi kan när som helst i ett bevis säga att n = n (där n är en term)

- Detta kallar vi *identitetsintroduktion*

- Vi har kommit till vårt första lilla formella bevis!

- <u>Övning</u>
  Visa att identitetsrelation är symmetrisk genom att anta a = b som premiss och visa b = a

1. a = b	
2. a = a	= **Intro**
3. b = a	= **Elim:** 1, 2