Filosofisk logik
Kapitel 19

Robin Stenwall

Lunds universitet

Dagens upplägg

- Gödels fullständighetsteorem
  - Sundhet och fullständighet
  - Fullständighetsbeviset
    - Vittneskonstanter
    - Henkinteorin
    - Eliminationsteoremet
    - Henkinkonstruktionen
- Gödels ofullständighetsteorem
- Tentamensförberedande diskussion

Gödels fullständighetsteorem

- Kapitel 19.1 diskuterar huruvida FOL är fullständigt.
- I formell logik definierade vi **logisk konsekvens** enligt följande:

S är en logisk konsekvens av premisserna $P_1,\ldots,P_n$ omm det är omöjligt för $P_1,\ldots,P_n$ att vara sanna och S falsk.

- Frågan vi nu ställer är huruvida det härledningssystem vi bekanta oss med i formell logik (och delvis i denna kurs) räcker för att bevisa allt vi vill bevisa.
- Alltså är FOL *fullständigt* i betydelsen att:

om S är en logisk konsekvens av $P_1,\ldots,P_n$ så finns det ett bevis för S från $P_1,\ldots,P_n$ i FOL?

Gödels fullständighetsteorem

- Beroende på vad som avses med logisk konsekvens så kommer vi få olika svar.
- Om vi avser FO-konsekvens så är svaret jakande.
- Om vi även tar predikatens betydelse i beaktande så är svaret nekande.

Gödels fullständighetsteorem

- Att bevisa fullständighet för det härledningssystem vi har använt för FOL, med avseende på den semantik som vi redan gått igenom, är ett betydligt svårare problem än att bevisa det för satslogiken (se 17.1).

- För satslogiken visades fullständighet först av Emil Prost 1923, och för predikatlogiken av Kurt Gödel (1906-1978) år 1929, även om båda använde sig av helt andra metoder än den vi skall använda oss av idag.

Gödels fullständighetsteorem

- Först lite notation.
- **T** $\vdash$ S säger att det finns ett bevis för S i T med avseende på härledningssystemet F.
  - OBS! detta betyder inte att alla satser i T måste användas i beviset (bara att alla satser som används finns i T).
- T $\vDash$ S säger att S är en FO-konsekvens av T.
- Gödels fullständighetsteorem (-sats) säger då följande:

  Låt T utgöra en mängd satser hos ett första ordningens språk L och låt S vara en sats i det språket: Om T $\vDash$ S, så **T** $\vdash$ S

Gödels fullständighetsteorem

- Som en direkt konsekvens av fullständighetsteoremet erhåller vi **kompakthetsteoremet** (-satsen):

  Låt T vara en mängd satser i L. Om varje ändlig delmängd av T har en modell, så har T en modell.

- Det centrala steget är att visa att om T inte är inkonsistent, så finns det en modell **M** vari alla satser i T är sanna (se 17.2).
- Vår första uppgift blir att konstruera en sådan modell: i detta fall en vars domän utgörs av mängdteoretiska konstruktioner av individkonstanter tagna ur språket självt.

Fullständighetsbeviset

- För FOL görs detta i fyra steg:

1. Tillägg av *vittneskonstanter*. Vi har inga garantier för att de individkonstanter som finns i L är tillräckliga för att beskriva alla domäner och behöver därför lägga till några. Vi kallar det resulterande språket L_H.

2. Bilda *Henkinteorin* H i språket L_H. Detta är en uppsättning axiom som beskriver hur kvantifikatorerna och identitetspredikatet fungerar i termer av konnektiven, dvs en sorts reduktion av predikatlogik till satslogik.

3. Visa *eliminationsteoremet*. Detta säger att alla satser som kan visas i Henkinteorin, och som inte innehåller vittneskonstanterna, också kan visas i första ordningens logik utan att anta Henkinteorin. Detta behövs för att garantera att den modell vi konstruerar för $T \cup H$ gör sanna och falska samma satser som T.

4. Bilda *Henkinkonstruktionen*. Denna är en modell vars domän består av ekvivalensklasser av individkonstanter i L_H som gör sann alla satser i $T \cup H$, och därmed också alla satser i T.

Fullständighetsbeviset
Vittneskonstanter

- För att kunna ge en teori som beskriver kvantifikatorerna måste vi kunna ersätta $\exists x S(x)$ med någon sats som inte innehåller $\exists x$.

- Detta kan göras genom att byta ut x mot någon konstant c om vilket vi inte antagit något mer än S(c).

- Ett sätt att garantera att sådana konstanter finns är att lägga till dem.

- För varje sats $\exists x S(x)$ lägger vi därför till konstanten $c_{S(x)}$ och kallar resultatet för detta L_1.

- Eftersom vi kan använda dessa konstanter för att bilda nya satser så innehåller detta språk dock fortfarande satser på formen $\exists x S'(x)$, som inte har motsvarande vittneskonstanter.

- Därför måste vi upprepa processen för att få språken L_1, L_2, L_3,…etc.

- Språket L_H definieras som

$$L_H =_{df.} \bigcup_{k \in N} L_k$$

dvs unionen av alla L_K.

Fullständighetsbeviset

Henkinteorin

- För att de nya konstanterna skall bete sig som vi vill, och för att vidare kunna beskriva kvantifikatorerna och identitetspredikatet, behöver vi Henkinteorin H som definieras som följande (oändliga) mängd satser:

1. $\exists x S(x) \rightarrow S(c_{S(x)})$ för alla satser $\exists x S(x)$.
2. Alla satser med formen $S(c) \rightarrow \exists x S(x)$.
3. Alla satser med formen $\neg \forall x S(x) \leftrightarrow \exists x \neg S(x)$
4. Alla satser med formen $c = c$.
5. Alla satser med formen $(S(c) \wedge c = d) \rightarrow S(d)$.

Fullständighetsbeviset
Eliminationsteoremet

- Eliminationsteoremet säger att alla satser som inte innehåller någon av vittneskonstanterna och som kan härledas från $T \cup H$ också kan härledas från T.

- Detta kan inses genom att studera Henkinaxiomen: de är direkta tillämpningar av härledningsregler i FOL (se 19.4).

Fullständighetsbeviset
Henkinkonstruktionen

- Som vi vet består en modell för ett språk L i FOL av en mängd D (domänen) samt extensioner till alla predikat och termer.
- Grundidén i Henkinkonstruktionen är att använda L_H:s individkonstanter för D.
- Men eftersom c = d kräver att c och d är identiska för att vara sann kan vi emellertid inte använda dem som de är: vi kommer att ha många olika konstanter c, d som visserligen satisfierar samma predikat, men som ändå är distinkta. Lösningen är att bilda relationen:

$$c \equiv d \text{ omm } T \cup H \vdash c = d$$

Detta är en ekvivalensrelation, så den tillåter att vi bildar ekvivalensklasser av konstanterna i L_H. Vi låter elementen i D vara dessa ekvivalensklasser.

Fullständighetsbeviset
Henkinkonstruktionen

- När vi satt ihop domänen är inte extensionerna något större problem. Vi låter extensionen av predikatet $P(x_1, \ldots, x_n)$ vara mängden av n-tupler $\langle [c_1]_\equiv, \ldots, [c_n]_\equiv \rangle$ av element i D sådana att $T \cup H \vdash P(c_1, \ldots, c_n)$.

- Detta är väldefinierat eftersom alla konstanter i samma ekvivalensklass $[c]_\equiv$ satisfierar samma predikat. Detta kan i sin tur härledas med hjälp av Henkinaxiomen och =elim.

Fullständighetsbeviset
Henkinkonstruktionen

- Henkinkonstruktionen ger en modell $\mathbf{M}_T$ för varje konsistent mängd satser T'. Följer vi samma steg som för beviset av satslogikens fullständighet får vi:

Om det inte är fallet att $T' \vdash \bot$, så finns en modell **M** sådan att $\mathbf{M} \vDash T'$ $\Leftrightarrow$

Om det inte är fallet att $T' \vdash \bot$, så är det inte fallet att $T' \vDash \bot$ $\Rightarrow$

Om det inte är fallet att $T \cup \{\neg P\} \vdash \bot$, så är det inte fallet att $T \cup \{\neg P\} \vDash \bot$ $\Leftrightarrow$

Om $T \vDash P$, så $\mathbf{T} \vdash P$

Gödels ofullständighetsteorem

- Gödels ofullständighetsteorem är förmodligen det mest diskuterade resultatet i logiken under 1900-talet.
- Teoremet rör en annan typ av fullständighet än det som omtalas i fullständighetsteoremet: medan den sistnämndas betydelse är den som vi gått igenom tidigare, används ordet ”fullständig” här för det som i boken kallas ”formellt fullständig”.
- En satsmängd T sägs vara *formellt fullständig* omm, för varje sats i språket, antingen $T \vdash P$ eller $T \vdash \neg P$ (vi vet från sundhetsteoremet och fullständighetsteoremet att detta säger samma sak som $T \vDash P$ eller $T \vDash \neg P$.

Gödels ofullständighetsteorem

- Varför är vi intresserad av formellt fullständiga satsmängder?
  - Om vi axiomatiserar en empirisk teori så bör vi inte förvänta oss att den är formellt fullständig: inte ens en perfekt återgivning av Newtons fysik säger någonting om hur snabbt specifika ting rör sig eller vad de väger, även om de specificerar samband mellan dessa.
  - Däremot är det annorlunda med en rent a priori disciplin som matematiken. Vad som är sant och falsk här följer med logisk nödvändighet utifrån matematiska termers betydelse, och för att få detta strikt och på en säker grund skulle vi vilja bestämma hur detta går till formellt – förslagsvis i FOL.

Gödels ofullständighetsteorem

- Eftersom vad som är matematiskt sant och falskt bör avgöras helt av de grundläggande antaganden vi gör om t.ex. de naturliga talen, reella talen eller mängdläran, så borde vi också kunna kräva att om T är en uppsättning axiom för det matematiska området vi vill beskriva, så gäller följande för varje sats P som bara innehåller matematiska predikat: $T \vdash P$ eller $T \vdash \neg P$.

- Gödels ofullständighetsteorem säger emellertid att detta är omöjligt.

Gödels ofullständighetsteorem: Varje logiskt system som innehåller Peanoaritmetiken och som är konsistent är formellt ofullständig.

Gödels ofullständighetsteorem

- Peanoaritmetiken (PA) är den sedvanliga axiomatiseringen av aritmetik med de naturliga talen.
  - Det är en uppsättning med sex axiom och ett axiomschema som definierar de naturliga talen samt addition och multiplikation (se 16.4), och som torde anses vara nödvändiga sanningar för att man skall kunna säga att man axiomatiserar just matematiken.
  - Trots detta går Gödels ofullständighetsteorem igenom även med en del svagare system.
  - Faktum är att även ZFC är formellt ofullständigt då PA går att uttrycka i ZFC genom att definiera talet 0 som $\varnothing$, och varje tal $n > 0$ som mängden av de föregående.

Gödels ofullständighetsteorem

- Bevisidén i Gödels teorem är att representera satser i FOL som tal (s.k. Gödelnumrering).
- Genom att genomföra detta noggrant kan vi visa att det finns rent numeriska predikat (dvs predikat som kan definieras helt i termer av addition och multiplikation i PA) som motsvarar begrepp såsom att vara en formel, att vara en sluten sats, att vara en sekvens av satser, eller att vara ett bevis för en sats.
- Om Bew(n) är predikatet för bevisbar, dvs det finns ett tal som är beviset för satsen med talet n, så kan vi t.ex. visa att om n är talet för en sats i PA, så finns det ett bevis för denna sats i PA omm Bew(n) är sann.

Gödels ofullständighetsteorem

- Det centrala steget i Gödels bevis består i att betrakta satsen:

  (G) G går inte att bevisa i PA.

- Gödels visade att det verkligen finns ett tal g för denna sats, och därför är satsen Bew(g) en välformad sats i PA.
- Men om denna sats är sann (och PA inte självmotsägande) så går Bew(g) inte att bevisa, och alltså har vi Bew(g) $\rightarrow$ ¬Bew(g) (alltså ¬Bew(g)).
- Men detta är precis vad satsen säger, och alltså är den sann, men inte bevisbar.