Filosofisk logik Kapitel 12 och 13

Robin Stenwall
Lunds universitet

Dagens föreläsning

- Informella bevismetoder för kvantifikatorer
  - Universell elimination
  - Existentiell introduktion
  - Existentiell elimination
  - Universell introduktion
  - General Conditional Proof

- Formella bevisregler för kvantifikatorer
  - $\forall$ Elim
  - $\exists$ Intro
  - $\exists$ Elim
  - $\forall$ Intro

Bevisföring med kvantifikatorer

- Vi har lärt oss vad kvantifikatorerna betyder
- Nu skall vi lära oss hur kvantifierade satser används i bevis
- Mer specifikt så kommer vi att lära oss bevismetoder som är tillräckliga för att bevisa samtliga konsekvenser som beror på meningen hos konnektiven, identitet och kvantifikatorerna.

Universell elimination

- Antag att följande generalisering är sann

  (1) Alla har en vän

- Tag sedan en godtycklig person ur vår domän: Tarski

- Givet att (1) är sann, så kan vi sluta oss till

  (2) Tarski har en vän

- Varför?

- (2) är en logisk konsekvens av (1)

Universell elimination

- Att (2) är en logisk konsekvens av (1) är bara ett exempel på en mer generell princip:

- **Principen:** Om någonting gäller för alla individer, så gäller det speciellt för en viss individ.

Dvs:

Från $\forall x\ S(x)$

kan vi härleda $S(c)$

förutsatt att c betecknar en individ i domänen

Universell elimination
Ett exempel

- Antag att följande är sant:

  (3) $\forall x(\text{Cube}(x) \vee \text{Small}(x))$

  samt att a och b betecknar individer i vår domän

- Med hjälp av universell elimination kan då du sluta dig till:

  (4) $\text{Cube}(a) \vee \text{Small}(a)$

  (5) $\text{Cube}(b) \vee \text{Small}(b)$

Existentiell introduktion

- En av de enklaste introduktionsreglerna

- Från

    (6) Tarski hälsade på Gödel

  kan vi sluta oss till

    (7) Någon hälsade på Gödel
    (8) Tarski hälsade på någon

- Från

    (9) Alla logiker älskar Tarski

  kan vi sluta oss till

    (10) Alla logiker älskar någon

Existentiell introduktion

- **Principen**: Om någonting gäller för en viss individ c, så finns det en individ för vilket det gäller.

Dvs:

Från $S(c)$

kan vi härleda $\exists x\, S(x)$

förutsatt att c betecknar en individ i domänen.

Existentiell introduktion
Ett exempel

- Antag att följande är sant:

(11) $Tet(a) \lor \neg SameSize(a, c)$

- Med hjälp av existentiell introduktion kan du då sluta dig till följande:

(12) $\exists x\ (Tet(x) \lor \neg SameSize(x, c))$

Existentiell introduktion
Ett potentiellt problem

- Antag att följande är sant:

  (13) Fantomen finns inte

- Följer det ur (13) att:

  (14) Det finns minst ett x sådant att x inte existerar?

- Nej! Fantomen betecknar inte ett objekt i vår domän.

Existentiell introduktion
Ett mer komplext exempel

- Betrakta följande argument:

  P1: $\forall x\,(Tet(x) \rightarrow Small(x))$

  P2: $\underline{Tet(a)}$

  S: $\exists x(Tet(x) \wedge Small(x))$

- Med hjälp av universell elimination erhåller vi $Tet(a) \rightarrow Small(a)$ ur P1.
- Från $Tet(a) \rightarrow Small(a)$ och P2 erhåller vi $Small(a)$
- Så vi har $Tet(a) \wedge Small(a)$
- Genom existentiell introduktion får vi S.

Existentiell introduktion
Övning

- Ge ett informellt bevis för följande:

P1: $\forall x\,(Tet(x) \vee Small(x))$

P2: $\underline{\neg Tet(a)}$

S: $\exists x\, Small(x)$

Vilka regler används?

- Utöver universell elimination och existentiell introduktion så finns det även mer komplexa bevisföringsmetoder som involverar kvantifikatorer.

- Vi kommer att titta närmare på tre av dem:
  - Existentiell elimination
  - Universell introduktion
  - General Conditional Proof

Existentiell elimination

- Antag att du har en existentiell premiss och vill visa att någonting följer ur den

  (14) Någonting är en liten kub
- Antag att domänen endast innehåller två ting, a och b
  - Kan du sluta dig till att a är en liten kub?
  - Kan du sluta dig till att b är en liten kub?
- Här är en idé.
  - Vi kan från (14) sluta oss till att det finns någon figur, kalla den Groink, som är en liten kub.
- Sen kan vi 'låtsas' att 'Groink' är ett riktigt namn och se vad som följer ur det antagandet.

Existentiell elimination

- Varför är detta en bra idé?
- Ja, en existentiell sats av typen:

$$\exists x(F(x) \wedge G(x))$$

- kan trots allt förstås som en disjunktion av typen:

$$(Fa \,\&\, Ga) \vee (Fb \,\&\, Gb) \vee (Fc \,\&\, Gc)\ldots$$

- Och om disjunktionen är sann så vet vi att det måste finnas minst en sann disjunkt med formen:

F__ & G__

- Här är det av ingen betydelse huruvida du har kännedom om objektet som både är F och G. Så länge du vet att *någonting* är F och G och du kan konstruera en giltig deduktion som går från ett påstående som designerar detta *någonting* (vad det än må vara '_') till en slutsats, så har du lyckats visa slutsatsen från premissen att *någonting* är F och G.

Existentiell elimination
Ett exempel

- Betrakta följande argument:

  P1: $\forall x\, (Tet(x) \rightarrow Small(x))$

  <u>P2: $\exists x\, Tet(x)$</u>

  S: $\exists x\, Small(x)$

- Vi måste använda oss av P2, så låt oss testa att införa ett låtsasnamn.
- Från P2 vet vi att det finns någon figur, kalla det d (detta motsvarar _), sådant att Tet(d).
- Med hjälp av universell elimination erhåller vi Tet(d) → Small(d) från P1.
- Så vi erhåller Small(d) genom modus ponens.
- Med hjälp av existentiell introduktion får vi S.

Existentiell elimination
En observation

- I exemplet ovan introducerade vi ett låtsasnamn och sedan använde vi oss av universell elimination.
- Kan vi göra det omvända?
- Antag att vi med hjälp av universell elimination först erhåller Tet(d) $\rightarrow$ Small(d) från P1.
- Kan vi nu introducera ett låtsasnamn: ex. låt d vara vad som än är en tetraeder enligt P2?
- Nej, själva poängen med låtsasnamn är att introducera *ett helt nytt namn*. Men i detta fall används d redan.
- Använd er alltid av universell elimination efter det att ni har introducerat ett låtsasnamn.

Existentiell elimination

- **Principen:** Om det finns en individ för vilken någonting gäller, så kan vi införa ett nytt namn för att beteckna den individen med och sluta oss till att den individ som namnet står för har egenskapen ifråga.

Dvs:

Från $\exists x\, S(x)$

kan vi sluta oss till $S(c)$

<u>förutsatt att c är ett nytt namn som inte redan betecknar en individ.</u>

Existentiell elimination
Ett exempel

- Betrakta följande argument:

  P1: $\forall y\,(Cube(y) \lor Dodec(y))$

  P2: $\forall x(Cube(x) \rightarrow Large(x))$

  P3: $\exists x \neg Large(x)$

  S: $\exists x Dodec(x)$

Informellt bevis: Givet P3 kan vi genom existentiell elimination anta att $\neg$Large(b). Ur P2 med hjälp av universell elimination följer det att Cube(b) $\rightarrow$ Large(b). Alltså måste $\neg$Cube(b). Men från P1 följer det att Cube(b) $\lor$ Dodec(b). Alltså Dodec(b). Ur detta följer det med hjälp av existentiell introduktion att $\exists x$Dodec(x).

Existentiell elimination
Övning

- Ge ett informellt bevis för följande argument:

P1: $\forall x\,(\mathrm{Tet}(x) \vee \neg \mathrm{Small}(x))$

P2: $\forall y\,(\mathrm{Tet}(y) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(a, y))$

P3: $\underline{\exists x\, \mathrm{Small}(x)}$

S: $\exists x\, \mathrm{LeftOf}(a, x)$

Universell introduktion (General Conditional Proof)

- Betrakta följande argument:

  P1: Alla som grubblar är olyckliga

  P2: Alla filosofistudenter grubblar

  S: Alla filosofistudenter är olyckliga

Informellt bevis: Låt ’Quine’ representera någon (vilken som helst) av filosofistudenterna. Given andra premissen, så grubblar Quine (universell elimination). Enligt P1, så måste Quine vara olycklig. Men eftersom Quine valdes ut arbiträrt, så följer det att alla filosofistudenter är olyckliga.

Universell introduktion

- Notera att vi inte valde ut en specifik filosofistudent
- Vår bevisföring var helt generell: den fungerar oberoende av vilken mängd entiteter den appliceras på
- Denna generalitet uppstod genom att vi introducerade ett nytt namn för att tala om ett arbiträrt (godtyckligt) objekt
- Då objektet var arbiträrt och någonting gäller för det objektet så är vi rättfärdigade att dra en slutsats om samtliga objekt.

Universell introduktion

- **Principen:** Om någonting gäller för en arbiträr individ så gäller det för alla individer.

Dvs:

Från $S(c)$

kan vi sluta oss till $\forall x S(x)$

<u>förutsatt att c är ett nytt namn som står för en godtycklig individ.</u>

Universell introduktion
Ett exempel

- Betrakta följande argument:

  P1: $\forall x Tet(x)$

  <u>P2: $\forall x Medium(x)$</u>

  S: $\forall x(Tet(x) \wedge Medium(x))$

- Låt 'c' representera en godtyckligt objekt i TW
- Genom universell elimination på P1 och P2, så erhåller vi Tet(c) och Medium(c).
- Så vi har $Tet(c) \wedge Medium(c)$
- Men eftersom c var godtycklig så följer S.

General Conditional Proof

- I praktiken är vi dock främst intresserade av att bevisa generella påståenden av följande form:

  $$\forall x\,(P(x) \to Q(x))$$

- För att bevisa detta genom universell introduktion så skulle du bevisa följande för ett arbiträrt c:

  $$P(c) \to Q(c)$$

- Detta kan genomföras genom att använda GCP.
  - Antag P(c) och visa att Q(c) följer

General Conditional Proof

- **Principen:** Antag att vi vill visa att alla saker av en viss typ har en viss egenskap. Det kan vi göra genom att låta ’c’ representera ett godtyckligt objekt av den typen och visa att c har egenskapen i fråga.

  Dvs:

  Om vi antar $P(c)$

  och lyckas visa $Q(c)$

  så kan vi sluta oss till $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$

<u>förutsatt att c är ett nytt namn som står för en godtycklig individ.</u>

General Conditional Proof
Några noteringar

- **Anmärkning 1:** GCP är en väldigt naturlig bevisregel men behövs egentligen inte givet att vi redan har introduktionsreglerna för $\rightarrow$ och $\forall$.

- I boken ses introduktionsregeln för $\forall$ som ett specialfall av GCP.

- **Anmärkning 2:** Om du vill visa $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ så kan du välja ett nytt namn 'c', anta P(c) och sedan visa Q(c), under förutsättningen att Q(c) inte innehåller några namn som introducerades genom existentiell elimination efter antagandet P(c).
  - Utan denna restriktion kan vi härleda falska slutsatser från sanna premisser (se boken 12.4)

General Conditional Proof
Ett exempel

- Betrakta följande argument:

  P1: $\forall x\ (Small(x) \rightarrow \neg Tet(x))$

  P2: $\underline{\forall x\ (\neg Tet(x) \rightarrow Cube(x))}$

  S: $\forall x\ (Small(x) \rightarrow Cube(x))$

- Låt 'a' representera ett arbiträrt objekt i TW
- Antag Small(a) (*Mål: visa att Cube(a)*)
- Från P1 följer Small(a) $\rightarrow \neg$Tet(a)
- Genom modus ponens följer $\neg$Tet(a)
- P2 ger oss $\neg$Tet(a) $\rightarrow$ Cube(a) och därmed Cube(a)
- Då a var godtycklig följer S.

∀ Elim

- Ok, nu är det dags att lära sig de formella bevisreglerna för kvantifikatorer. Vi börjar med en lätt:

$\forall x S(x)$

.

.

.

$S(c)$

Exempel

1. $\forall x\, (Tet(x) \wedge Small(x))$
2. $Tet(c) \wedge Small(c)$ $\quad$ ∀Elim 1

∀ Intro

- Det fanns två informella metoder för att bevisa ett generellt påstående
  - Universell introduktion
  - General Conditional Proof

- Vi kommer att titta på versioner av ∀ Intro, en för varje informell metod.

∀ Intro
Version 1

$\boxed{c}$

.

.

.

$P(c)$

$\forall x P(x)$

c får inte figurera utanför det underbevis där det introducerades, då c måste vara arbiträr.

Lådan med c läses som *låt c vara ett arbiträrt objekt i domänen*.

∀ Intro
Version 2

$\boxed{c}$ $P(c)$

.

.

.

$Q(c)$

$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

där c inte förekommer utanför det underbevis där c introducerades.

∃ Intro

$S(c)$

.

.

.

$\exists x S(x)$

Exempel

1. $Tet(c)$
2. $\exists x Tet(x)$ ∃ Intro 1

∃ Elim

$\exists x S(x)$

.

$\boxed{c}$ $S(c)$

.

.

.

Q

Q

Där c inte förekommer utanför det underbevis där det introducerades.

Övningar

- Gör följande härledningar i F:

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \forall z(Q(z) \to R(z))\end{array}}{\forall x(P(x) \to R(x))}$$

$$\frac{\begin{array}{l}\forall x(C(x) \to L(x)) \\ \forall x(L(x) \to R(x, b)) \\ \exists x C(x)\end{array}}{\exists x(L(x) \wedge R(x, b))}$$

Övningar forts.

$\exists x(T(x) \land S(x))$

$\underline{\forall x(S(x) \to R(x, b))}$

$\exists x R(x, b)$

$\underline{\forall x \neg P(x)}$

$\neg \exists x P(x)$

$\underline{\neg \forall x P(x)}$

$\exists x \neg P(x)$

Övningar forts.

$\underline{\exists y \forall x R(x, y)}$ (går det att hitta ett bevis för det

$\forall x \exists y R(x, y)$ omvända?)

$$\underline{\exists y(G(y) \wedge \forall x(B(x) \rightarrow L(x, y)))}$$
$$\forall x(B(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge L(x, y)))$$