Formell logik
Kapitel 3 och 4

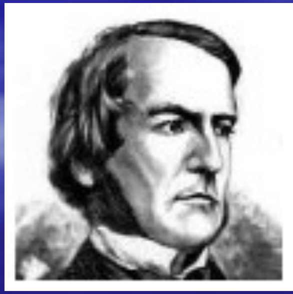
Robin Stenwall
Lunds universitet

Kapitel 3: De Booleska konnektiven

- Vi sade att predikaten och namnen kan variera mellan olika FOL

- Vi ska nu titta på några språkliga element som är gemensamma för alla FOL

- De *Booleska konnektiven* svarar mot orden ”och”, ”eller” och ”det är inte fallet att” (efter den brittiske logikern George Boole)



Kapitel 3.1: Negationssymbolen

- Den atomära satsen Hemma(john) uttrycker att John är hemma

- Vi kan negera satsen på följande sätt:

  $\neg$Hemma(john)

- Denna sats uttrycker att John *inte* är hemma

- Allmänt gäller: Om P är en sats i FOL, så är $\neg$P också en sats i FOL

- Sanningsvärdet hos ¬P anges av följande *sanningstabell*:

P	¬P
TRUE	FALSE
FALSE	TRUE

- En *literal* är en sats som är antingen atomär eller negationen av en atomär sats

Kapitel 3.2: Konjunktionssymbolen

- Om vi har två satser kan vi alltid bilda en ny sats genom att sätta en *konjunktionssymbol* mellan dem. Exempelvis:

    Hemma(john) $\wedge$ Hemma(mary)

- Satsen uttrycker att John är hemma *och* Mary är hemma

- De satser som förbinds med konjunktionssymbolen kallas *konjunkter*

- I vardagsspråk kan vi sätta konjunktionen mellan namn: ”John och Mary är hemma”.

  Översättning: Hemma(john) $\wedge$ Hemma(mary)

- I vardagsspråk kan vi sätta konjunktionen mellan verb: ”John halkade och föll”.

  Översättning: Halkade(john) $\wedge$ Föll(john)

- En sats i FOL kan innehålla en konjunktion även om dess vardagsspråkliga motsvarighet saknar konjunktion

  ”Pålle är en vit häst” översätts Vit(pålle) $\wedge$ Häst(pålle)

- Sanningstabellen för konjunktion:

P	Q	$P \wedge Q$
TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	FALSE
FALSE	TRUE	FALSE
FALSE	FALSE	FALSE

- En konjunktion är sann om och endast om båda konjunkterna är sanna

Kapitel 3.3: Disjunktionssymbolen

- Om vi har två satser kan vi bilda en ny sats genom att sätta en disjunktionssymbol mellan dem:

  $\text{Hemma(john)} \vee \text{Hemma(mary)}$

- Satsen uttrycker att John är hemma *eller* Mary är hemma

- En sats som har formen $P \vee Q$ kallas för en *disjunktion*

- De satser som förbinds med disjunktionssymbolen kallas *disjunkter*

- I logiken förstås ”eller” i dess *inklusiva* bemärkelse, dvs en disjunktion är sann även i det fall då båda disjunkterna är sanna

- Vi kan uttrycka den *exklusiva* innebörden av ”eller” på följande sätt:

$$(\text{Hemma}(\text{john}) \vee \text{Hemma}(\text{mary})) \wedge \neg(\text{Hemma}(\text{john}) \wedge \text{Hemma}(\text{mary}))$$

- Satsen säger att John eller Mary är hemma men att det inte är så att båda är hemma (”antingen John eller Mary är hemma”)

- Vi kan nu även uttrycka ”varken … eller”:

$$\neg(\text{Hemma}(\text{john}) \vee \text{Hemma}(\text{mary}))$$

Satsen säger att varken John eller Mary är hemma

- Sanningstabellen för disjunktion:

P	Q	$P \vee Q$
TRUE	TRUE	TRUE
TRUE	FALSE	TRUE
FALSE	TRUE	TRUE
FALSE	FALSE	FALSE

- En disjunktion är falsk om och endast om båda disjunkterna är falska

Kapitel 3.5: Mångtydighet och parenteser

- Följande mening är mångtydig:

  ”Max är hemma eller Clair är hemma och Carl är glad”

- I FOL undviker vi den typen av (syntaktisk) mångtydighet med hjälp av parenteser:

  Betydelse 1: $\text{Hemma(max)} \vee (\text{Hemma(clair)} \wedge \text{Glad(carl)})$

  Betydelse 2: $(\text{Hemma(max)} \vee \text{Hemma(clair)}) \wedge \text{Glad(carl)}$

- Parenteser används också vid negation för att indikera vad det är som negeras

- Exempel:

  $\neg\text{Hemma(clair)} \wedge \text{Hemma(max)}$

  betyder något annat än

  $\neg(\text{Hemma(clair)} \wedge \text{Hemma(max)})$

Kapitel 3.6: Olika sätt att säga samma sak

- Låt P och Q vara satser i FOL

- <u>DeMorgans lagar</u>

  $\neg(P \wedge Q)$ säger samma sak som $\neg P \vee \neg Q$

  $\neg(P \vee Q)$ säger samma sak som $\neg P \wedge \neg Q$

- <u>Exempel</u>

  $\neg(\text{Hemma}(\text{max}) \wedge \text{Hemma}(\text{john}))$

  är ekvivalent med

  $\neg\text{Hemma}(\text{max}) \vee \neg\text{Hemma}(\text{john})$

Kapitel 3.7: Översättning till FOL

- Hur vet man att en översättning från vardagsspråk till FOL är korrekt?
- FOL-satsen ska ha samma sanningsvärde som originalsatsen under alla omständigheter
- Dessutom: Vi föredrar översättningar som bibehåller originalsatsens struktur
- Exempel:

  Översätt ”Clair och Max är inte båda hemma”

  $\neg(\text{Hemma}(\text{clair}) \wedge \text{Hemma}(\text{max}))$

  är bättre än

  $\neg\text{Hemma}(\text{clair}) \vee \neg\text{Hemma}(\text{max})$

Kapitel 4: De Boolska konnektivens logik

- De Booleska konnektiven är *sanningsfunktionella*: sanningsvärdet hos en konjunktion/disjunktion/negation är en funktion av delsatsernas sanningsvärden
- Om vi vet sanningsvärdet hos P och sanningsvärdet hos Q, så vet vi också sanningsvärdet hos

  $\neg P$

  $P \wedge Q$

  $P \vee Q$

- Det här kapitlet handlar om hur vi med hjälp av sanningstabeller kan studera begreppen:

  logisk konsekvens

  logisk ekvivalens

  logisk sanning

Kapitel 4.1: Tautologi och logisk sanning

- *Logiska sanningar*: satser som inte kan vara falska
- Exempel: a = a är en logisk sanning
- En sats är *logiskt möjlig* om dess sanning inte kan uteslutas på rent logiska grunder
- Är det logiskt möjligt för ett objekt att inte vara identiskt med sig självt?
- Är det logiskt möjligt att färdas snabbare än ljuset?

- Vi kan också säga:
  En sats är logiskt möjlig om det finns en möjlig situation (”värld”) i vilken satsen är sann.
  En sats är logiskt nödvändig om satsen är sann i alla möjliga situationer (”världar”)

- Finns det någon säker metod för att ta reda på om en sats är logiskt möjlig/nödvändig?

- Programmet Tarski’s World ger en metod för att avgöra om en sats är logiskt möjlig genom att skapa en enkel värld bestående av olika block

- *Sanningstabellmetoden* är en metod för att avgöra om en sats är logiskt nödvändig *på grund av meningen hos konnektiven*

- Om en sats är möjlig i Tarski's World är den också logiskt möjlig. Det omvända gäller dock inte i allmänhet

- Om en sats befinns vara nödvändigt sann med hjälp av sanningstabellen är den också logiskt nödvändig. Det omvända gäller dock inte i allmänhet

- Exempel: a = a är en logisk sanning (den är nödvändigt sann), men inte en tautologi. Samma sak gäller för ex. $\neg(\text{Larger}(a,b) \wedge \text{Larger}(b, a))$.

Sanningtabellmetoden

- Metoden går ut på att se om en sats är sann oberoende av hur man tilldelar sanningsvärden till de atomära delsatserna
- En sådan sats sägs vara en *tautologi*
- Metoden gås igenom steg för steg på sidorna 95-100 i kursboken

- <u>Övning</u>

  Konstruera en sanningstabell för satsen

  $(\text{Cube}(a) \lor \neg\text{Cube}(a)) \lor \text{Cube}(b)$

  Tautologi?

- <u>Övning</u>

  Konstruera en sanningstabell för satsen

  $(\text{Cube}(a) \land \text{Cube}(b)) \lor \neg\text{Cube}(c)$

  Tautologi?

- En tautologi har alltid bara sanningsvärdet T (TRUE) i kolumnen under sitt huvudkonnektiv
- Låt S vara en sats innehållande n olika atomära satser. Hur många rader har sanningstabellen för S?
- Annat sätt av visa att en sats är logiskt nödvändig: bevisa satsen utan att använda några premisser i beviset (se nästa föreläsning)

Kapitel 4.2: Logisk och tautolog ekvivalens

- Två satser är *logiskt ekvivalenta* om och endast om det har samma sanningsvärden i alla situationer
- Två satser är *tautologt ekvivalenta* om och endast om de är logiskt ekvivalenta *i kraft av meningen hos de ingående konnektiven*
- Övning (De Morgans lag)

  Visa att $\neg(A \land B)$ och $\neg A \lor \neg B$ är tautologt ekvivalenta
- Observera: Om två satser är tautologt ekvivalenta så är de också logiskt ekvivalenta. Men det omvända gäller inte i allmänhet (se sidan 107-8 i boken)
- Exempel: $a = b \land \text{Cube}(a)$ är logiskt ekvivalent med $a = b \land \text{Cube}(b)$ utan att satserna är tautologt ekvivalenta.

Kapitel 4.3: Logisk och tautolog konsekvens

- P är en *tautolog konsekvens* av Q om och endast om varje rad i sanningstabellen där Q är sann också är en rad där P är sann
- Övning: Visa med sanningstabell att $A \vee B$ är en tautolog konsekvens av $A \wedge B$
- Varje tautolog konsekvens är också en logisk konsekvens. Men det omvända gäller inte i allmänhet
- Exempel: $a = c$ är en logisk konsekvens av $a = b \wedge b = c$ utan vara en tautolog konsekvens
- Flera premisser P är en tautolog konsekvens av $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ om och endast om varje rad i sanningstabellen där alla premisserna är sanna också är en rad där P är sann
- Övning: Visa med sanningstabell att B är en tautolog konsekvens av premisserna $A \vee B$ och $\neg A$