# Formell logik
# Kapitel 7 och 8

Robin Stenwall
Lunds universitet

# Kapitel 7: Konditionalsatser

- Kapitlet handlar om konditionalsatser (om-så-satser) och deras logik
- Idag: bevismetoder för konditionalsatser, dvs om-så-satser
- Exempel: ”Om Max är hemma så är Clair på biblioteket”

- Formalisering: Hemma(max) $\rightarrow$ Biblioteket(clair)

- Symbolen $\rightarrow$ kallas för den materiella konditionalsymbolen

- I satsen P $\rightarrow$ Q kallas P för *försats* eller *antecedent* och Q för *eftersats* eller *konsekvent*

- Hur ska vi ange sanningstabellen för en konditionalsats?

- Sanningstabell för konditionalsatsen i klassisk logik:

| P | Q | $P \rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| TRUE | TRUE | TRUE |
| TRUE | FALSE | FALSE |
| FALSE | TRUE | TRUE |
| FALSE | FALSE | TRUE |

- Satsen $P \rightarrow Q$ är falsk endast i ett fall: när försatsen är sann och eftersatsen falsk. Annars är den sann
- Satsen $P \rightarrow Q$ uttrycker inget orsaksförhållande

## *Nödvändiga och tillräckliga villkor*

- Hur kan vi översätta följande påståenden till FOL?
  - P endast om Q
  - Q förutsatt att P
  - Q om P

- Alla dessa satser översätts med $P \rightarrow Q$

- Satsen $P \rightarrow Q$ uttrycker att P är ett *tillräckligt villkor* för Q och att Q är ett *nödvändigt villkor* för P

- Exempel: "Sten får godkänt på kursen endast om han har lämnat in hemuppgiften"

  Vilken översättning är rätt?

  (A) Godkänd(sten) $\rightarrow$ Hemuppgift(sten)

  (B) Hemuppgift(sten) $\rightarrow$ Godkänd(sten)

*Översättning av ”såvida inte” (eng. unless)*

- Exempel: “Max är hemma, såvida inte Clair är i biblioteket”

  Översättning till FOL: $\neg$Biblioteket(clair) $\rightarrow$ Hemma(max)

# Avsnitt 7.2: Ekvivalenssymbolen

- Vi har kommit till vårt sista konnektiv: $\leftrightarrow$
- $P \leftrightarrow Q$ svarar mot ”P om och endast om Q” och ”P precis då Q” (eng. just in case)
- En sats av formen $P \leftrightarrow Q$ är sann om och endast om P och Q har samma sanningsvärde

- Sanningstabell för ekvivalens:

| P | Q | $P \leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| TRUE | TRUE | TRUE |
| TRUE | FALSE | FALSE |
| FALSE | TRUE | FALSE |
| FALSE | FALSE | TRUE |

# Avsnitt 7.3: Konversationella implikaturer (eng. conversational implicature)

- Betrakta påståendet: Max är hemma, såvida inte Clair är i biblioteket

- Varför översätta påståendet med

  $\neg$Biblioteket(clair) $\rightarrow$ Hemma(max)

  snarare än med

  $\neg$Biblioteket(clair) $\leftrightarrow$ Hemma(max)?

- Skilj mellan:
  - det som verkligen ingår i den bokstavliga meningen hos ett yttrande
  - det som inte ingår i den bokstavliga meningen men som ändå kan ”läsas in” i yttrandet (konversationell implikatur, H. P. Grice)

## *Upphävningstestet (eng. cancellation test)*

- Om någonting är en del av den bokstavliga meningen hos ett påstående, så kan det inte utan motsägelse upphävas genom att talaren utvecklar sin tanke vidare
- Om någonting bara är en konversationell implikatur, så kan det upphävas utan motsägelse
- Exempel: Pappan säger till sin son ”Du får din efterrätt endast om du äter upp din spenat”. Låt P vara ”Du får din efterrätt” och Q vara ”Du äter upp din spenat”. Vilken översättning är bäst?

  $P \rightarrow Q$

  $P \leftrightarrow Q$ (dvs. $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$)

  - $Q \rightarrow P$ är bara en konversationell implikatur av ”Du får din efterrätt endast om du äter upp din spenat”. Den förra kan upphävas utan motsägelse genom att pappan tillägger ”Men jag lovar inte att du får efterrätten om du äter upp spenaten”.

# Avsnitt 7.4: Sanningsfunktionell fullständighet

- Vi har nu fem konnektiv till vårt förfogande: ett 1-ställigt ($\neg$) och fyra 2-ställiga ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$).
- Behöver vi några fler sanningsfunktionella konnektiv?
- Svar: Nej. Faktum är att de booleska konnektiven ($\neg$, $\wedge$, $\vee$) är sanningsfunktionellt fullständiga, d.v.s. de kan uttrycka samtliga sannings-funktioner. Vi behöver m.a.o. inte $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$ i FOL (men de är bra att ha).
- Inte nog med det. Det räcker med ett enda konnektiv (ex. $\downarrow$ eller $\uparrow$) för att uttrycka samtliga sanningsfunktioner.
- Övning: skapa ert eget treställiga konnektiv (namnge/symbolisera) och uttryck det med hjälp av de booleska konnektiven.

# Kapitel 8: Konditionalsatsernas logik

- Vi börjar med att introducera bevisreglerna informellt
- Modus ponens: Om vi har visat $P \rightarrow Q$ och P, så kan vi sluta oss till Q
- Regeln kallas i boken implikationselimination (varför?)
- Vi har motsvarande regel för ekvivalens:
  Om vi har visat antingen $P \leftrightarrow Q$ eller $Q \leftrightarrow P$ och även visat P, så kan vi sluta oss till Q.

## *Några viktiga logiska samband*

$P \to Q$ är ekvivalent med $\neg Q \to \neg P$ (kontraposition)

$$P \to Q \quad\Leftrightarrow\quad \neg P \vee Q$$

$$\neg(P \to Q) \quad\Leftrightarrow\quad P \wedge \neg Q$$

$$P \leftrightarrow Q \quad\Leftrightarrow\quad (P \to Q) \wedge (Q \to P)$$

$$P \leftrightarrow Q \quad\Leftrightarrow\quad (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

## *Den konditionala bevismetoden (eng. conditional proof)*

- Hur bevisar man en sats av typen $P \to Q$?

  Metod: Anta P som premiss och härled sedan Q

- Exempel: Visa med ett informellt bevis att $P \to R$ följer av premisserna $P \to Q$ och $Q \to R$

- Hur bevisar man en sats av typen $P \leftrightarrow Q$

  Metod: bevisa $P \to Q$ och $Q \to P$ var för sig, och använd sedan en annan regel som heter ekvivalensintroduktion

# Avsnitt 8.2: Formella bevisregler för implikation och ekvivalens

- Implikationselimination ($\rightarrow$**Elim**)

$P \rightarrow Q$

$P$

$Q$

- Implikationsintroduktion ($\rightarrow$**Intro**)

| P
|---
| 
| Q

$P \rightarrow Q$

- Övning: Härled $A \rightarrow C$ från premisserna $A \rightarrow B$ och $B \rightarrow C$ (se tidigare informellt bevis)
- Övning: Härled $A \rightarrow C$ från premissen $(A \vee B) \rightarrow C$

- Ekvivalenselimination (↔**Elim**)

$$\begin{array}{|l}
P \leftrightarrow Q \qquad \text{(eller } Q \leftrightarrow P\text{)} \\
\\
P \\
\\
Q
\end{array}$$

- Ekvivalensintroduktion ($\leftrightarrow$**Intro**)

$P$

$Q$

$Q$

$P$

$P \leftrightarrow Q$

- Övning: Bevisa $P \leftrightarrow \neg\neg P$

  Bevisa $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$