Formell logik
Kapitel 9

Robin Stenwall
Lunds universitet

Kapitel 9: Introduktion till kvantifiering

- Vi har hittills betraktat logiska resonemang vars giltighet enbart beror på meningen hos konnektiv som ”och”, ”eller”, osv

- Det var den delen av logiken som de antika stoikerna försökte systematisera

- Men alla giltiga resonemang är inte av den typen

- Tidigare exempel: a = c följer av a = b och b = c

- Annat exempel (aristotelisk syllogism)

Alla rika skådespelare är bra skådespelare

Alla bra skådespelare är berömda

Alla rika skådespelare är berömda

Här beror giltigheten också på innebörden hos ”alla”

- Ytterligare en syllogism:

Inga rika skådespelare är bra skådespelare

Brad Pitt är en rik skådespelare

Brad Pitt är ingen bra skådespelare

Här beror giltigheten på betydelsen hos ”inga”, dvs. ”inte någon”

Avsnitt 9.1: Variabler och atomära formler

- Vi introducerar ett nytt språkligt element: variabler
- I varje FOL finns en oändlig mängd variabler
- Som variabler använder vi t, u, v, w, x, y och z (med eller utan index)
- Variabler räknas som termer

- Att observera om medföljande programvara:
  - I programmet Tarski's World kan endast följande *indexfria* variabler användas: u, v , w , x, y och z
  - Programmet Fitch förstår även variabler med index

- Vi kan nu bilda t ex följande uttryck:

  father(x)

  (y + z) × z

  Home(x)

  Taller(max, x)

  Taller(father(z), z)

- Dessa uttryck är dock inte atomära *satser*, då deras sanningsvärde är obestämt, utan atomära *formler* (eng. "atomic well-formed formulas", förkortas "atomic wffs")

Avsnitt 9.2: Kvantifikatorer

- Kvantifikatorer gör det möjligt att uttrycka kvantiteter (antal)

Allkvantifikatorn (eng. universal quantifier)

- Symbolen $\forall$ används för att uttrycka ”alla”
- Kombinationen $\forall x$ utläses ”för alla x”
- Om P(x) är en formel kan vi bilda en sats genom att sätt $\forall x$ framför
- Exempel: $\forall x$ Hemma(x) uttrycker ”Alla är hemma”
- $\forall x$ Hemma(x) uttrycker ”För alla x gäller att x är hemma”, dvs. ”Alla är hemma”

- Ofta vill man säga att alla saker av en viss sort har en viss egenskap
- Hur uttrycker vi t ex att alla filosofer kan logik?

Svar: $\forall x\ (\text{Filosof}(x) \rightarrow \text{Logikkunnig}(x))$

- Satsen säger ”För alla x, om x är en filosof så är x logikkunnig”, dvs. ”Alla filosofer kan logik” (alt. ”Alla filosofer är logikkunniga”).

Existenskvantifikatorn

- Symbolen ∃ används för att uttrycka ”någon”, dvs. ”minst ett ting”
- Kombinationen ∃x utläsas ”för något x”
- Om P(x) är en formel kan vi bilda en sats genom att sätta ∃x framför
- Exempel: ∃x Hemma(x)
- Satsen uttrycker ”För något x gäller att x är hemma”, dvs. ”Någon är hemma”

- Ofta vill man säga att någonting av en viss sort har en viss egenskap

- Hur uttrycker vi t ex att någon filosof kan logik (dvs att det finns åtminstone en logikkunnig filosof)?

  Svar: $\exists x\ (\text{Filosof}(x) \wedge \text{Logikkunnig}(x))$

- Satsen uttrycker ”För något x gäller att x är filosof och logikkunnig”, dvs. någon filosof kan logik.

Avsnitt 9.3: Formler och satser

- Vi ska nu ge definitioner av begreppen *formel* och *sats*

Först lite repetition

- Definition av *term*: följande räknas som termer: konstantsymboler, variabler och funktionsuttryck innehållande konstanter och/eller variabler

- Definition av *atomär formel*: En atomär formel är en n-ställig predikatsymbol följd av n stycken termer , där termerna kan bestå antingen av variabler eller individkonstanter.

Genom att utgå från de atomära formlerna kan vi konstruera mer komplexa formler med följande regler:

1. Om P är en formel, så är $\neg P$ en formel
2. Om $P_1, \ldots, P_n$ är formler, så är $(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n)$ en formel
3. Om $P_1, \ldots, P_n$ är formler, så är $(P_1 \vee \ldots \vee P_n)$ en formel
4. Om P och Q är formler, så är $(P \rightarrow Q)$ en formel
5. Om P och Q är formler, så är $(P \leftrightarrow Q)$ en formel
6. Om P är en formel och x en variabel, så är $\forall x\, P$ en formel
7. Om P är en formel och x en variabel, så är $\exists x\, P$ en formel

8. Någonting är en formel endast om det kan konstrueras med hjälp av 1.-7. med utgångspunkt från atomära formler

En variabelförekomst är *fri* om den inte binds av någon kvantifikator

Exempel

Filosof(x) är en (atomär) formel

Logikkunnig(x) är en atomär formel

Alltså är (Filosof(x) $\rightarrow$ Logikkunnig(x)) en formel (enligt regel 4)

Alltså är $\forall$x (Filosof(x) $\rightarrow$ Logikkunnig(x)) en formel (enligt regel 6)

Vilka variabelförekomster är bundna i formeln
$\forall$x (Filosof(x) $\rightarrow$ Logikkunnig(x))?

Innehåller formeln några fria variabelförekomster?

- Vi kan nu definiera begreppet *sats* på ett precist sätt: en sats är en formel som saknar fria variabelförekomster

  Exempel: $\exists x\ (\text{Filosof}(x) \wedge \text{Logikkunnig}(x))$

- Är följande uttryck en formel/sats?

  $\exists x\ \text{Filosof}(x) \wedge \text{Logikkunnig}(x)$

  Det är en formel men ingen sats (varför?)

- En konvention: Vi brukar ta bort de allra yttersta parenteserna i en formel när inga missförstånd kan uppkomma

  Exempel: Vi skriver $A \wedge B$ istället för $(A \wedge B)$

- När vi talar om ”något objekt” eller ”alla objekt” är det underförstått vi att vi talar om en viss individmängd eller domän (eng. domain of discourse)

- Exempel på domäner:
  - mängden av alla naturliga tal: 0, 1, 2, …
  - mängden av alla nu levande människor
  - mängden av alla antika filosofer

- Det enda formella kravet på en domän är att den inte får vara tom

Avsnitt 9.5: De fyra aristoteliska formerna

- Aristoteles logik omfattade logiska relationer mellan följande satstyper:

  Alla P är Q
  Några P är Q
  Inga P är Q
  Några P är inte Q

- Vi kan översätta dessa satser till FOL

- Översättning av ”Alla P är Q”:

  $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

- Översättning av ”Några P är Q”:

  $\exists x\ (P(x) \land Q(x))$

- Översättning av ”Inga P är Q”:

  $\neg\exists x\ (P(x) \land Q(x))$ (alt. $\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$)

- Översättning av ”Några P är inte Q”:

  $\exists x\ (P(x) \land \neg Q(x))$ (alt. $\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$)

Avsnitt 9.6: Att översätta mer komplicerade satser

- I FOL kan vi uttrycka påståenden som går långt utöver Aristoteles fyra satsformer
- Vi kan även studera logiska relationer mellan dessa mer komplexa satser (se Kapitel 10-)
- Övning: översätt följande satser till FOL:
  - ”Någon ensam liten varelse är rädd”
  - ”Alla ordningssamma filifjonkor är rädda för Mårran”
  - ”Ingen grå hemul vill trösta Knyttet”
  - ”Too-ticki bor i ett blått båthus”
  - ”Samtliga hattifnattar är ordningssammare än Snorkfrökens bror”
  - ”Någon hemul är varken till höger eller till vänster om Too-tickis hus”
  - ”Någons far är släkt med Mårran”

Tomma generaliseringar

- Vilket sanningsvärde har nedanstående sats i de världar där ingenting är P, dvs i världar där $\forall x \neg P(x)$ är sant?

  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

- Svar: Sann. Satsen säger ju att för alla x gäller att OM x är P, SÅ är x Q. Implikationen är sann då ingenting satisfierar försatsen.
- Men vad säger ni då om följande sats. Är inte det en kontradiktion?

  $\forall y(Tet(y) \rightarrow Cube(y))$

- Svar: Nej. Den kommer ju ut som sann i världar där ingenting är en tetraeder.